Exercice 1.

Montrer que sur toute planète de l'univers contenant au moins deux pays, il existe toujours deux pays ayant le même nombre de voisins.

Exercice 2.

Dénombrer le nombre

1. d'applications d'un ensemble à m éléments vers un ensemble à n élements,
2. de bijections entre deux ensembles à n éléments,
3. d'injections d'un ensemble à $n-1$ éléments dans un ensemble à n éléments,
4. de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à $n-1$ éléments.

Exercice 3.

1. Pour un conseil de ministres on place n ministres autour d'une table ronde ($n \geqslant 3$). Chaque ministre discute seulement avec ses deux voisins. Combien de conseils différents peut-on former ?
2. On considère dans le plan un polygône régulier avec n sommets ($n \geqslant 3$). Déterminer le nombre de transformations (identité comprise) de type rotation ou reflexion qui laissent le polygône invariant.
3. Déterminer le nombre de rotations qui laissent invariant un tetraèdre régulier.
4. Même question pour un cube.
5. Même question pour un octaèdre régulier.

Exercice 4.

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Dénombrer les ensembles suivants

1. $\mathscr{A}_1 = \left\{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2 \,|\, A \subset B\right\}$.
2. $\mathscr{A}_2 = \left\{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2 \,|\, A \cup B = E\right\}$.

Exercice 5.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2^{4^n} + 5$ est un entier naturel divisible par 7.

Exercice 6.

Montrer que $\forall n \geqslant 1$,

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right) < 3 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 7.

Prouver que $\forall n \geqslant 1$,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Exercice 8.

Prouver que $\forall n \geqslant 1$,

$$\frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

1. Solutions

Solution 1.

Plaçons nous sur une planète donné et notons $p_1, \dots, p_n$ les pays et v_k le nombre de voisins du pays p_k. Evidemment $0 \leqslant v_k \leqslant n-1$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Supposons par l'absurde que les v_k sont distincts deux à deux. Alors, quitte à renuméroter les pays, on peut supposer que

$$0 \leqslant v_1 < v_2 < \cdots < v_n \leqslant n-1\,.$$

Ca devient serré... on a forcément $v_1 = 0$ et $v_n = n-1$. Or c'est une contradiction car la première égalité signifie que p_1 n'a pas de voisin (c'est une île), tandis que la deuxième égalité dit que tout pays est voisin de p_n.

Solution 2.

1. n^m

2. $n!$

3. $n!$

4. Soit A un ensemble à n éléments et B un ensemble à $n-1$ éléments. Chaque surjection $f : A \to B$ possède $n-1$ fibres $f^{-1}(\{b\}), b \in B$; toutes les fibres sont des singletons à l'exception d'une qui contient précisément deux éléments.
Pour construire une surjection de A sur B on a donc $\binom{n}{2}$ possibilités pour constituer des fibres dans A, puis on a $(n-1)!$ possibilités pour leur associer des images dans B. Le nombre de surjections de A sur B est donc

$$\binom{n}{2}(n-1)! = \frac{n!\,(n-1)}{2}\,.$$

Solution 3.

1. Comme seulement la position relative des ministres compte on peut fixer le premier ministre sur une chaise. Il reste alors $(n-1)!$ combinaisons pour placer les autres. Une reflexion par rapport à l'axe passant par le premier ministre et le centre de la table ne fait qu'échanger les notions de “voisin gauche” et "voisin droite”, donc elle ne change pas le conseil de ministres. Par conséquence les $(n-1)!$ combinaisons viennent en pairs de deux qui donnent le même conseil. Ainsi le nombre de conseils différents est $(n-1)!/2$.

2. Evidemment il y a n rotations d'angle $2k\pi/n, k = 0, \dots, n-1$. Puis il y a les reflexions associées aux *axes de symétrie* :
   - si n est impair ce sont les droites qui passent par un sommet et le milieu du côté opposé,
   - si n est pair ce sont les droites qui passant par deux sommets opposés ou par les milieux de deux côtés opposés.

   En tout il y a donc $2n$ transformations de type rotation ou reflexion qui laissent le polygône invariant.

3. Les *axes de rotation* d'un tetraèdre régulier sont
   - les droites passant par un sommet et le centre de la face opposée. Il y en a 4 ; l'angle de rotation correspondant est $2\pi/3$,
   - les droites passant par les milieux de deux arêtes opposées. Il y en a 3 ; l'angle correspondant est π.

   En tout, cela fait 12 rotations (identité comprise) qui laissent invariant un tetraèdre régulier.

4. Les axes de rotation d'un cube sont
   - les droites passant par les centres de deux faces opposées. Il y en a 3 ; l'angle correspondant est $2\pi/4$,
   - les droites passant par les milieux de deux arêtes opposées. Il y en a 6 ; l'angle correspondant est π,
   - les droites passant par deux sommets opposés. Il y en a 4 ; l'angle correspondant est $2\pi/3$.

   En tout, cela fait 24 rotations (identité comprise) qui laissent invariant un cube.

5. Les rotations laissant invariant un octaèdre régulier sont précisément celles qui laissent invariant un cube. En effet le cube est le *dual* de l'octaèdre dans le sens suivant : les centres des faces d'un cube constituent les sommets d'un octaèdre, et les centres des faces d'un octaèdre constituent les sommets d'un cube.

Solution 4.

1. Commençons par fixer une partie B de E à $k \leqslant n$ éléments : il y a $\binom{n}{k}$ choix. Pour chacun de ces choix, on dénombre 2^k choix possibles d'une partie A de B. L'ensemble $\mathscr{A}_1$ est donc de cardinal

$$|\mathscr{A}_1| = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = (2+1)^n = 3^n.$$

2. L'égalité $A \cup B = E$ est équivalente à $A^c \subset B$. Puisque l'application de $\mathscr{P}(E)$ dans lui-même définie par $A \mapsto A^c$ est bijective, on est ramené à la question précédente et donc

$$|\mathscr{A}_2| = |\mathscr{A}_1| = 3^n.$$

Solution 5.

▶ *Version avec congruences* : soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $HR(n)$ la proposition
$$2^{4^n} + 5 \equiv 0[7].$$

❧ $HR(0)$ est vraie puisque $2^{4^0} + 5 = 7$.

❧ Prouvons que pour tout $n \geqslant 0$, $HR(n)$ implique $HR(n+1)$: soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $HR(n)$ vraie, c'est-à-dire $2^{4^n} \equiv 2[7]$. Puisque $2^{4^{n+1}} = (2^{4^n})^4$, on a
$$2^{4^{n+1}} \equiv 2^4[7] \equiv 2[7].$$
D'où $2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0[7]$ et $HR(n+1)$ est vraie.

❧ D'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{4^n} + 5 \equiv 0[7]$.

▶ *Version sans congruence* : posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = 2^{4^n} + 5,$$
et soit $HR(n)$ la proposition « 7 divise u_n ».

❧ $HR(0)$ est vraie puisque $u_0 = 7$.

❧ Prouvons que pour tout $n \geqslant 0$, $HR(n)$ implique $HR(n+1)$: soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $HR(n)$ vraie. Puisque $2^{4^{n+1}} = (2^{4^n})^4$, on a $u_{n+1} = (u_n - 5)^4 + 5$. En utilisant la formule du binôme et le triangle de Pascal,
$$u_{n+1} = u_n^4 - 20u_n^3 + 150u_n^2 - 500u_n + 5^4 + 5.$$
Or u_n est divisible par 7, ainsi que
$$5^4 + 5 = 5 \times 7 \times 18,$$
donc u_{n+1} est divisible par 7.

❧ D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $2^{4^n} + 5$ est divisible par 7.

Solution 6.

Raisonnons par récurrence. Soient $n \geqslant 1$ et $HR(n)$ la proposition
$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}.$$

▶ $HR(1)$ est banale car les deux membres sont dans ce cas égaux à 2.

▶ Soit $n \geqslant 1$. Supposons $HR(n)$ vérifiée, ie
$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}.$$
En multipliant membre à membre par $1 + 1/(n+1)^3 > 0$, on obtient
$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right) \leqslant \left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right).$$
L'inégalité
$$\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n+1} \qquad (\star)$$
est donc une *condition suffisante* de $HR(n+1)$. Or,
$$\begin{aligned}
(\star) \quad &\iff \quad \frac{3n-1}{n} \times \frac{1+(n+1)^3}{(n+1)^3} \leqslant \frac{3n+2}{n+1} \\
&\iff \quad (3n-1) \times (n^3 + 3n^2 + 3n + 2) \\
&\qquad\quad \leqslant n(3n+2)(n+1)^2 \\
&\iff \quad 3n^4 + 8n^3 + 6n^2 + 3n - 2 \\
&\qquad\quad \leqslant 3n^4 + 8n^3 + 7n^2 + 2n \\
&\iff \quad 0 \leqslant n^2 - n + 2 \\
&\iff \quad 0 \leqslant n(n-1) + 2
\end{aligned}$$
Puisque cette dernière inégalité est banale pour $n \geqslant 1$, $(\star)$ est vraie et donc $HR(n+1)$ aussi.

▶ D'après le principe de récurrence, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Solution 7.

Soit , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $HR(n)$ la proposition suivante

$$1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}.$$

► $HR(1)$ est banalement vraie.

► Prouvons que pour tout $n \geqslant 1$, $HR(n)$ implique $HR(n+1)$: soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $HR(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Alors

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Or

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

car

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

et

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$HR(n+1)$ est donc vraie.

► D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}.$$

Solution 8.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $HR(n)$ la proposition suivante

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

► $HR(1), HR(2)$ et $HR(3)$ sont banalement vraies.

► Prouvons que pour tout $n \geqslant 1$, $HR(n)$ implique $HR(n+1)$. soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $HR(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

On a

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n+2} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \times \frac{2n+1}{2n+2},$$

donc

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n+2} \leqslant \frac{2n+1}{2(n+1)\sqrt{3n+1}}.$$

Or ,

$$\frac{2n+1}{2(n+1)\sqrt{3n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

est équivalent à

$$\frac{(2n+1)^2}{4(n+1)^2(3n+1)} \leqslant \frac{1}{3n+4},$$

qui est aussi équivalent à

$$(2n+1)^2(3n+4) \leqslant 4(n+1)^2(3n+1)$$

et encore à

$$12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leqslant 12n^3 + 28n^2 + 20n + 1$$

qui est finalement équivalent à $n \geqslant 3$, $HR(n+1)$ est donc vraie.

► D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$