Exercice 1.

Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b on pose

$$a \leqslant_\varphi b \iff \varphi(b) - \varphi(a) \geqslant |b - a|\,.$$

1. Montrer que $\leqslant_\varphi$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cet ordre est total si et seulement si pour tous réels a, b on a $|\varphi(b) - \varphi(a)| \geqslant |b - a|$.
3. Quel ordre obtient on si $\varphi = Id_{\mathbb{R}}$?

Exercice 2.

Soit $f : E \to F$, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

Exercice 3.

Let

$$f : X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto f(x)$$

be a map. Consider the maps

$$\Delta : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(Y),\ A \longmapsto f(A) \quad \text{and} \quad \nabla : \mathscr{P}(X) \longleftarrow \mathscr{P}(Y),\ f^{-1}(B) \longleftarrow B\,.$$

Prove that

1. f injective $\iff$ Δ injective $\iff$ ∇ surjective,
2. f surjective $\iff$ Δ surjective $\iff$ ∇ injective.

Exercice 4.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soit $A \subset E$. Prouver que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Prouver que f est injective *si et seulement si* pour toute partie A de E, $A = f^{-1}(f(A))$.
3. Soit $B \subset F$. Prouver que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
4. Prouver que f est surjective *si et seulement si* pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 5.

Dans $\mathbb{N}^*$, on considère la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad q = p^n$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
2. La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?

Exercice 6.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan, de centres respectifs O, O' et de rayons respectifs R et R'. On dit que $\mathcal{C}$ est inférieur à $\mathcal{C}'$ si $OO' \leqslant R' - R$. On note alors $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{C}'$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre dans l'ensemble des cercles du plan.

Exercice 7.

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f_1(x) = |x - 2|$;
2. $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f_2(x) = \frac{x}{x^2+1}$;
3. $f_3 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f_3(x) = \frac{3x+1}{4x+1}$;
4. $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3$;
5. $f_5 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto x^3$.

Exercice 8.

Prouver l'égalité

$$\bigcup_{n \geqslant 1} \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[=]0, 1[\cup]1, 2[.$$

1. Solutions

Solution 1.

1. On doit vérifier trois propriétés.
Reflexivité : trivial.
Transitivité : soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant_\varphi b \leqslant_\varphi c$. Cela signifie que

$$\varphi(b) - \varphi(a) \geqslant |b-a| \quad \text{et} \quad \varphi(c) - \varphi(b) \geqslant |c-b|\,.$$

En ajoutant ces deux inégalités et en utilisant l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned}\varphi(c) - \varphi(a) &\geqslant |c-b| + |b-a| \\ &\geqslant |c-b+b-a| = |c-a|\,.\end{aligned}$$

Ainsi $a \leqslant_\varphi c$.
Antisymétrie : soient a, b des réels tels que $a \leqslant_\varphi b$ et $b \leqslant_\varphi a$. Ainsi

$$\varphi(b) - \varphi(a) \geqslant |b-a| \quad \text{et} \quad \varphi(a) - \varphi(b) \geqslant |a-b|\,.$$

En ajoutant ces deux inégalités on obtient

$$0 \geqslant 2|b-a| \geqslant 0\,,$$

donc $a = b$.

2. Nous présentons une preuve par chaîne d'équivalences.

$$\begin{aligned} & \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \text{ comparable à } b \\ \iff\ & \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant_\varphi b \ \text{ ou } \ b \leqslant_\varphi a \\ \iff\ & \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \varphi(b) - \varphi(a) \geqslant |b-a| \\ \text{ou} \\ -(\varphi(b) - \varphi(a)) \geqslant |b-a| \end{cases} \\ \iff\ & \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |\varphi(b) - \varphi(a)| \geqslant |b-a| \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que la valeur absolue $|x|$ est supérieure à y si et seulement x ou son opposé $-x$ est supérieur à y.

3. L'ordre $\leqslant_{Id_\mathbb{R}}$ est l'ordre habituel $\leqslant$.

Solution 2.

Raisonnons par double inclusion.

► Comme $A \cap f^{-1}(B) \subset A$, on a

$$f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A).$$

Comme $A \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B)$, on a

$$f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

Ains Comme $A \cap f^{-1}(B) \subset A$, on a

$$f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B.$$

► Réciproquement, si $y \in f(A) \cap B$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x) \in B$ ainsi

$$x \in A \cap f^{-1}(B)$$

et donc

$$y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(B)).$$

Solution 3.

Some preparations are needed. First we show that

$$\forall\, A \subset X \ : \quad f(f^{-1}(f(A))) = f(A)\,.$$

"$\supset$" : It is clear that $A \subset f^{-1}(f(A))$. Therefore $f(A) \subset f(f^{-1}(f(A)))$.
"$\subset$" : Let $y \in f(f^{-1}(f(A)))$. There exists $x \in f^{-1}(f(A))$ such that $y = f(x)$. Since $x \in f^{-1}(f(A))$ we know that $f(x) \in f(A)$. Thus $y \in f(A)$.

Now we show that

$$\forall\, B \subset Y\,, \quad f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)\,.$$

"$\supset$" : It is clear that $B \subset f(f^{-1}(B))$. Therefore $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
"$\subset$" : Let $x \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$. This means that $f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Hence there exists $x' \in f^{-1}(B)$ such that $f(x) = f(x')$. Since $x' \in f^{-1}(B)$ it follows that $f(x) = f(x') \in B$. This means that $x \in f^{-1}(B)$.

Remark : Actually we have just proved that the following diagrams commute, i.e., you can follow any arrow and you will get the same result.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}(X) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathscr{P}(Y) \\ \mathscr{P}(Y) \arrow[r, "\nabla"'] & \mathscr{P}(X) \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{P}(Y) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\nabla"'] & \mathscr{P}(X) \\ \mathscr{P}(X) \arrow[r, "\Delta"'] & \mathscr{P}(Y) \arrow[u, "\nabla"'] \end{tikzcd}$$

1. We prove three implications, thus making a circle.

► f injective $\implies$ Δ injective :
Suppose f injective. Let $A, A' \in \mathscr{P}(X)$ such that $f(A) = f(A')$. In order to prove that Δ is injective we have to show that $A = A'$. Take any $x \in A$. Then $f(x) \in f(A) = f(A')$ and therefore there exists $x' \in A'$ such that $f(x) = f(x')$. Since f is injective it follows that $x = x' \in A'$. This shows that $A \subset A'$. Since A and A' play interchangable roles, we conclude that $A = A'$.

► Δ injective $\implies$ ∇ surjective :
Let $A \in \mathscr{P}(X)$. Then $\Delta(\nabla(\Delta(A))) = \Delta(A)$. Since Δ is injective it follows that $\nabla(\Delta(A)) = A$. This proves that ∇ is surjective.

▶ ∇ surjective $\implies f$ injective :
Suppose ∇ surjective. Let $x, x' \in X$ such that $y := f(x) = f(x')$. Since ∇ is surjective there exist $B, B' \in \mathscr{P}(Y)$ such that

$$\{x\} = f^{-1}(B) \quad \text{and} \quad \{x'\} = f^{-1}(B').$$

Clearly y must be in B and in B'. Therefore

$$\{x\} \subset f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(B) \text{ and } \{x'\} \subset f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(B').$$

It follows that $\{x\} = f^{-1}(B) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(B') = \{x'\}$. This proves the injectivity of f.

2. Again we prove three implications.

▶ f surjective $\implies \nabla$ injective :
Suppose f surjective. Let $B \in \mathscr{P}(Y)$. If we can show that $B = f(f^{-1}(B))$ then we are done, because this equation clearly proves the surjectivity of Δ.
Clearly $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
On the other hand let $y \in B$. Since f is surjective there exists $x \in X$ such that $f(x) = y$. Thus $x \in f{-}1(B)$ and $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, which shows that $B \subset f(f^{-1}(B))$.

▶ ∇ injective $\iff \Delta$ surjective :
We know by the preceeding question that Δ injective $\iff \nabla$ surjective. But in the two commuting diagrams Δ and ∇ play interchangable roles — it doesn't matter that they are derived from f.

▶ Δ surjective $\implies f$ surjective :
Suppose Δ surjective. Let $y \in Y$. There exists $A \subset X$ such that $\Delta(A) = \{y\}$. Clearly $A \neq \varnothing$. Take any $x \in A$. Then $f(x) = y$ which proves the surjectivity of f.

Solution 4.

1. Soit $x \in A$. On a alors $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}(f(A))$.

2. *Raisonnons en deux temps.*

◇ *Supposons f injective.*

Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. On a $f(x) \in f(A)$. Ainsi, il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = f(x)$. D'où par injectivité de f, $x = x'$ et donc $x \in A$.

◇ *Supposons que $\forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))$.*

Soit $(x, x') \in A^2$ tel que $f(x) = f(x')$. On a alors $\{x\} = f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(f(\{x'\})) = \{x'\}$. Donc l'application f est injective.

3. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe un élément x de $f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$ et ainsi $y \in B$.

4. *Raisonnons en deux temps.*

◇ Supposons f surjective. Soit $y \in B$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $x \in f^{-1}(B)$ et $y \in f(f^{-1}(B))$.

◇ Supposons que $\forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$. En particulier $F = f(f^{-1}(F)) = f(E)$ ce qui prouve que f est surjective.

Solution 5.

1.
– La réflexivité est claire : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p\mathcal{R}p$ puisque $p = p^1$.
– Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}p$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = p^n$ et $p = q^m$. Cela implique que $p^{nm} = p$. Puisque $p \neq 0$,

$$p^{nm} = p \iff p^{nm-1} = 1 \iff p = 1 \text{ ou } nm = 1$$

Si $p = 1$, on a $q = 1^n = 1 = p$, et si $nm = 1$, on a $n = m = 1$ d'où $q = p^1 = p$.
La relation est donc antisymétrique.
– Soient $(p, q, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}r$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = p^n$ et $r = q^m$, ce qui implique $r = p^{nm}$, donc $p\mathcal{R}r$.
La relation est donc transitive.

L'ordre n'est pas total puisque par exemple aucune des relations $2\mathcal{R}3$ ni $3\mathcal{R}2$ n'est vraie.

2. Supposons que $\{2, 3\}$ admette un majorant p. On a alors $2\mathcal{R}p$ et $3\mathcal{R}p$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = 2^n$ et $p = 3^m$. Ainsi p est à la fois pair et impair, ce qui est absurde.
Ce raisonnement par l'absurde prouve que $\{2, 3\}$ n'est pas majorée.

Solution 6.

L'interprétation géométrique de la relation est claire : $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{C}'$ signifie que le cercle $\mathcal{C}$ est à l'intérieur de $\mathcal{C}'$. Notons que cela implique nécessairement $R' \geqslant R$.
– La réflexivité est évidente.
– Si $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}' \leqslant \mathcal{C}$, alors $OO' \leqslant R' - R$ et $O'O \leqslant R - R'$. Cela implique $R' \geqslant R$ et $R \geqslant R'$, donc $R = R'$, et donc $OO' = 0$, d'où $O = O'$. Ainsi les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont même centre et même rayon, donc sont égaux.
La relation est donc antisymétrique.
– Soient trois cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ tels que $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}' \leqslant \mathcal{C}''$. On a $OO' \leqslant R' - R$ et $O'O'' \leqslant R'' - R'$. D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$OO'' \leqslant OO' + O'O'' \leqslant (R' - R) + (R'' - R') = R'' - R\,,$$

ce qui prouve bien que $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{C}''$.
La relation est donc transitive.

Solution 7.

① Puisque $f_1(1) = f_1(3)$, f_1 n'est pas injective. On a clairement $-1 \notin f_1(\mathbb{R})$ donc f_1 n'est pas surjective.

② Puisque $f_2\left(4 \pm 2\sqrt{3}\right) = 1/4$, f_2 n'est pas injective. On a $1 \notin f_2(\mathbb{R})$ donc f_2 n'est pas surjective.

③ Puisque $\forall x \geqslant 0$,

$$f_3(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{16x+4},$$

la fonction f_3 est injective. Puisque $3/4 \not\in f_3(\mathbb{R})$, la fonction f_3 n'est pas surjective.

④ La fonction f_4 est une bijection d'après le cours sur les fonctions usuelles.

⑤ Puisque tout nombre complexe admet au moins une racine cubique, f_5 est surjective. Puisque $f_5(1) = f_5(j)$ et $j \neq 1$, f_5 n'est pas injective.

Solution 8.

D'abord nous remarquons que

$$\bigcup_{n \geqslant 1} \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[=]1, 2[\,\dot\cup\, B\,, \quad \text{où } B = \bigcup_{n \geqslant 2} \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[.$$

Il s'agit donc de prouver $B =]0, 1[$.

Première preuve. Pour tout $n \geqslant 2$ on pose

$$B_n = \bigcup_{k=2}^{n} \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[.$$

Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 2$ on a $B_n = \left]\frac{1}{n}, 1\right[$. C'est évident pour $n = 2$. Supposons l'égalité vraie à un certain rang $n \geqslant 2$. Alors

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= B_n \ \cup \left]\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}\right[\\ &= \left]\frac{1}{n}, 1\right[\cup \left]\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}\right[\\ &= \left]\frac{1}{n+1}, 1\right[. \end{aligned}$$

La dernière égalité ci-dessus vient de l'encadrement $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n+1} < 1$ qui se vérifie facilement en muliplíant par $n(n+1)$.
On conclût que

$$B = \bigcup_{n \geqslant 2} B_n = \bigcup_{n \geqslant 2} \left]\frac{1}{n}, 1\right[=]0, 1[.$$

Deuxième preuve. Raisonnons par double inclusion.

► Soit $a \in B$. Alors par définition de B il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que $a \in \left]\frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0}\right[$. Donc $0 < \frac{1}{n_0} < a < \frac{2}{n_0} \leqslant 1$. Ainsi $a \in]0, 1[$.

► Soit $a \in]0, 1[$. Alors l'intervalle $\left]\frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right[$ est de largeur strictement plus grand que 1, et contient donc un nombre entier n_0. Ainsi

$$1 < \frac{1}{a} < n_0 < \frac{2}{a},$$

donc $n_0 \geqslant 2$ et en multipliant par x/n_0 on obtient

$$\frac{1}{n_0} < a < \frac{2}{n_0},$$

c'est-à-dire $a \in \left]\frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0}\right[\subset B$.

► *Alternative.* Soit $a \in]0, 1[$. La suite $(an)_{n \in \mathbb{N}}$ est non-majorée. Il existe donc

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \ \mid \ na > 1\}.$$

On a alors $n_0 a > 1$ et donc $n_0 > \frac{1}{a} > 1$, c'est-à-dire $n \geqslant 2$. Peut-on avoir $(n_0 - 1)a > 1$? Non, car n_0 est le plus petit entier n tel que $na > 1$, et $n_0 - 1$ serait encore plus petit ! Donc

$$(n_0 - 1)a \not> 1,$$

ou autrement dit $(n_0 - 1)a \leqslant 1$, d'où $n_0 a \leqslant 1 + a < 2$. On a alors l'encadrement

$$1 < n_0 a < 2$$

ce qui montre que $a \in \left]\frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0}\right[\subset B$.