

**Exercice 1.**

Let

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ & f & \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

be a map. Consider the maps

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y) & \text{and} & \mathcal{P}(X) & \longleftarrow & \mathcal{P}(Y) \\ & \Delta & & & & & \nabla \\ A & \longmapsto & f(A) & & f^{-1}(B) & \longleftarrow & B. \end{array}$$

Prove that

- $f$  injective  $\iff \Delta$  injective  $\iff \nabla$  surjective,
- $f$  surjective  $\iff \Delta$  surjective  $\iff \nabla$  injective.

**Exercice 2.**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

- Soit  $A \subset E$ . Prouver que  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .
- Prouver que  $f$  est injective si et seulement si pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $A = f^{-1}(f(A))$ .
- Soit  $B \subset F$ . Prouver que  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .
- Prouver que  $f$  est surjective si et seulement si pour toute partie  $B$  de  $F$ ,  $f(f^{-1}(B)) = B$ .

**Exercice 3.**

Soit  $X$  un ensemble.

- Montrer qu'il n'existe pas de surjection de  $X$  sur  $\mathcal{P}(X)$ .
- Existe-t-il une injection de  $X$  dans  $\mathcal{P}(X)$ ?

**Exercice 4.**

Soit  $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$  et  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ .

- Montrer que  $f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  est une bijection de  $P$  sur  $D$ .
- Si  $\Delta = \{z \in P \mid \text{Re } z = 0\}$ , déterminer  $f(\Delta)$ .

**Exercice 5.**

- Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{Z}^2$  définie par  $f(x, y) = (x, x + y)$ . Montrer que  $f$  est bijective, et déterminer  $f^{-1}$ .
- Plus généralement on considère l'application  $f_{a,b}$  de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{Z}^2$  définie par  $f_{a,b}(x, y) = (ax, ax + by)$ . A quelle condition sur  $(a, b)$   $f_{a,b}$  est-elle injective? surjective?

**Exercice 6.**

Soient  $E$  un ensemble et  $A, B, C$  trois sous-ensembles de  $E$  tels que

$$A \cup B = A \cap C, \quad B \cup C = B \cap A \quad \text{et} \quad C \cup A = C \cap B.$$

Montrer que  $A = B = C$ .

**Exercice 7.**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . Simplifier  $A \setminus (E \setminus B)$ .

**Exercice 8.**

Calculer les ensembles  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  pour  $E = \{0, 1\}$ .

**Exercice 9.**

Soient  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux parties de  $E$ . Montrer que

$$A = B \text{ si et seulement si } A \cup B = A \cap B.$$

**Exercice 10.**

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses? On justifiera ses réponses par une preuve ou un contre-exemple.

- $A \subset C$  et  $B \subset C \implies A \cup B \subset C$ ;
- $A \subset B \implies A \cap C \subset B \cap C$ ;
- $A \subset B \implies A \cup C \subset B \cup C$ ;
- $A \subset B$  et  $C \subset D \implies A \cup C \subset B \cup D$ ;
- $A \subset B$  et  $C \subset D \implies A \cap C \subset B \cap D$ ;
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ;
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**Exercice 11.**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois ensembles tels que  $A \cup B = B \cap C$ . Montrer que  $A \subset B \subset C$ .

### 1. Solutions

**Solution 1.**

Some preparations are needed. First we show that

$$\forall A \subset X : f(f^{-1}(f(A))) = f(A).$$

“ $\supset$ ” : It is clear that  $A \subset f^{-1}(f(A))$ . Therefore  $f(A) \subset f(f^{-1}(f(A)))$ .

“ $\subset$ ” : Let  $y \in f(f^{-1}(f(A)))$ . There exists  $x \in f^{-1}(f(A))$  such that  $y = f(x)$ . Since  $x \in f^{-1}(f(A))$  we know that  $f(x) \in f(A)$ . Thus  $y \in f(A)$ .

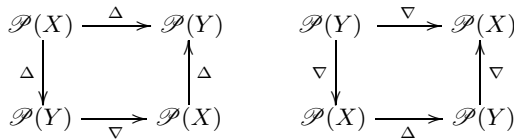
Now we show that

$$\forall B \subset Y, f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B).$$

“ $\supset$ ” : It is clear that  $B \subset f(f^{-1}(B))$ . Therefore  $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$ .

“ $\subset$ ” : Let  $x \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$ . This means that  $f(x) \in f(f^{-1}(B))$ . Hence there exists  $x' \in f^{-1}(B)$  such that  $f(x) = f(x')$ . Since  $x' \in f^{-1}(B)$  it follows that  $f(x) = f(x') \in B$ . This means that  $x \in f^{-1}(B)$ .

*Remark* : Actually we have just proved that the following diagrams commute, i.e., you can follow any arrow and you will get the same result.



1. We prove three implications, thus making a circle.

►  $f$  injective  $\implies \Delta$  injective :

Suppose  $f$  injective. Let  $A, A' \in \mathcal{P}(X)$  such that  $f(A) = f(A')$ . In order to prove that  $\Delta$  is injective we have to show that  $A = A'$ . Take any  $x \in A$ . Then  $f(x) \in f(A) = f(A')$  and therefore there exists  $x' \in A'$  such that  $f(x) = f(x')$ . Since  $f$  is injective it follows that  $x = x' \in A'$ . This shows that  $A \subset A'$ . Since  $A$  and  $A'$  play interchangeable roles, we conclude that  $A = A'$ .

**Solution 2.**

1. Soit  $x \in A$ . On a alors  $f(x) \in f(A)$  et donc  $x \in f^{-1}(f(A))$ .

2. Raisonnons en deux temps.

◊ Supposons  $f$  injective.

Soit  $x \in f^{-1}(f(A))$ . On a  $f(x) \in f(A)$ . Ainsi, il existe  $x' \in A$  tel que  $f(x') = f(x)$ . D'où par injectivité de  $f$ ,  $x = x'$  et donc  $x \in A$ .

◊ Supposons que  $\forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))$ .

Soit  $(x, x') \in A^2$  tel que  $f(x) = f(x')$ . On a alors  $\{x\} = f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(f(\{x'\})) = \{x'\}$ . Donc l'application  $f$  est injective.

►  $\Delta$  injective  $\implies \nabla$  surjective :

Let  $A \in \mathcal{P}(X)$ . Then  $\Delta(\nabla(\Delta(A))) = \Delta(A)$ . Since  $\Delta$  is injective it follows that  $\nabla(\Delta(A)) = A$ . This proves that  $\nabla$  is surjective.

►  $\nabla$  surjective  $\implies f$  injective :

Suppose  $\nabla$  surjective. Let  $x, x' \in X$  such that  $y := f(x) = f(x')$ . Since  $\nabla$  is surjective there exist  $B, B' \in \mathcal{P}(Y)$  such that

$$\{x\} = f^{-1}(B) \quad \text{and} \quad \{x'\} = f^{-1}(B').$$

Clearly  $y$  must be in  $B$  and in  $B'$ . Therefore

$$\{x\} \subset f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(B) \quad \text{and} \quad \{x'\} \subset f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(B').$$

It follows that  $\{x\} = f^{-1}(B) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(B') = \{x'\}$ . This proves the injectivity of  $f$ .

2. Again we prove three implications.

►  $f$  surjective  $\implies \nabla$  injective :

Suppose  $f$  surjective. Let  $B \in \mathcal{P}(Y)$ . If we can show that  $B = f(f^{-1}(B))$  then we are done, because this equation clearly proves the surjectivity of  $\Delta$ .

Clearly  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

On the other hand let  $y \in B$ . Since  $f$  is surjective there exists  $x \in X$  such that  $f(x) = y$ . Thus  $x \in f^{-1}(B)$  and  $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ , which shows that  $B \subset f(f^{-1}(B))$ .

►  $\nabla$  injective  $\iff \Delta$  surjective :

We know by the preceding question that  $\Delta$  injective  $\iff \nabla$  surjective. But in the two commuting diagrams  $\Delta$  and  $\nabla$  play interchangeable roles — it doesn't matter that they are derived from  $f$ .

►  $\Delta$  surjective  $\implies f$  surjective :

Suppose  $\Delta$  surjective. Let  $y \in Y$ . There exists  $A \subset X$  such that  $\Delta(A) = \{y\}$ . Clearly  $A \neq \emptyset$ . Take any  $x \in A$ . Then  $f(x) = y$  which proves the surjectivity of  $f$ .

3. Soit  $y \in f(f^{-1}(B))$ . Il existe un élément  $x$  de  $f^{-1}(B)$  tel que  $f(x) = y$  et ainsi  $y \in B$ .

4. Raisonnons en deux temps.

◊ Supposons  $f$  surjective. Soit  $y \in B$ . Puisque  $f$  est surjective, il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . Ainsi,  $x \in f^{-1}(B)$  et  $y \in f(f^{-1}(B))$ .

◊ Supposons que  $\forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$ . En particulier  $F = f(f^{-1}(F)) = f(E)$  ce qui prouve que  $f$  est surjective.

**Solution 3.**

1. Supposons par l'absurde qu'il y a une surjection  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . On pose  $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ . Clairement  $A \in \mathcal{P}(X)$ , donc il existe  $x_0 \in X$  tel que  $A = f(x_0)$ . Alors on a soit  $x_0 \in A$ , soit  $x_0 \notin A$ .

- Si  $x_0 \in A$  alors  $x_0 \notin f(x_0) = A$ , contradiction!

- Si  $x_0 \notin A = f(x_0)$ , donc par définition de  $A$ , on a  $x_0 \in A$ , contradiction!

Il ne peut donc pas exister un tel  $f$ .

2. Si  $X \neq \emptyset$ , alors l'application  $X \rightarrow \mathcal{P}(X), x \mapsto \{x\}$ , est manifestement injective. Pour le cas de l'ensemble vide, l'application vide fait l'affaire.

**Solution 4.**

1.  $f$  est définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ , donc en particulier sur  $P$ . Soit  $y \in D$ . En particulier  $y \neq 1$ , et on vérifie aisément que  $f(z) = y \Leftrightarrow z = i \frac{1+y}{1-y}$ . Puisque  $\frac{1+y}{1-y} = \frac{1-|y|^2 + y - \bar{y}}{|1-y|^2} = \frac{1-|y|^2 + 2i \operatorname{Im} y}{|1-y|^2}$ , en en déduit que  $\operatorname{Im} z = \frac{1-|y|^2}{|1-y|^2} > 0$ , vu que  $|y|^2 < 1$  par hypothèse. Ainsi  $f$  est bien une bijection de  $P$  sur  $D$ .

2. Montrons que  $f(\Delta) = ]-1, 1[$ .

- Si  $z \in \Delta$ , il existe  $a > 0$  tel que  $z = ia$ , d'où  $f(z) = \frac{ia-i}{ia+i} = \frac{a-1}{a+1} \in ]-1, 1[$ .
- Réciproquement si  $y \in ]-1, 1[$ , alors  $z = f^{-1}(y) = i \frac{1+y}{1-y}$  est de partie réelle nulle (puisque  $\frac{1+y}{1-y}$  est ici réel), donc  $z \in \Delta$  (car on a vu à la question 1 que  $z \in P$ ), et comme  $y = f(z)$  on a donc bien  $y \in f(\Delta)$ .

**Solution 5.**

1.  $f^{-1}(x, y) = (x, y - x)$ .

2.  $f_{a,b}$  est injective si et seulement si  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .  
 $f_{a,b}$  est surjective si et seulement si  $(a, b) \in \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$ .

**Solution 6.**

On a  $A \subset C$  car

$$A \subset A \cup B = A \cap C \subset C.$$

On remarque que les trois propriétés de l'énoncé sont invariantes sous la permutation circulaire  $A \mapsto B \mapsto C$ . Donc avec  $A \subset C$  on a aussi  $B \subset A$  et  $C \subset B$ , c'est-à-dire  $A \subset C \subset B \subset A$ , d'où  $A = C$  puis  $B = C$ .

**Solution 7.**

On trouve  $A \cap B$ .

**Solution 8.**

On a

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\},$$

et

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{E\}, \dots$$

$$\dots, \{\{\emptyset\}, \{0\}\}, \{\{\emptyset\}, \{1\}\}, \{\emptyset, \{E\}\} \dots$$

$$\dots, \{\{0\}, \{1\}\}, \{\{0\}, E\}, \{\{1\}, E\} \dots$$

$$\dots, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, E\}, \{\{0\}, \dots$$

$$\dots, \{1\}, E\}, \{\emptyset, \{1\}, E\}, \mathcal{P}(E)\}.$$

**REMARQUE** — Pour un calcul de  $\mathcal{P}(E)$ , dans un souci de clarté et de prudence, on recensera les parties de  $E$  de la plus petite ( $\emptyset$ ) à la plus grande ( $E$ ).

**Solution 9.**

► Supposons que  $A = B$ . On a alors banalement

$$A \cap B = A \cup B = A = B.$$

► *Réciproquement*, supposons que  $A \cup B = A \cap B$ . Montrons que  $A = B$  par double inclusion. On a

$$A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$$

et puisque  $A$  et  $B$  jouent des rôles symétriques, on a également  $B \subset A$ .

**Solution 10.**

Prouvons par exemple que  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

► Comme  $B \subset B \cup C$ , on a  $A \cap B \subset A \cap (B \cup C)$ . On prouve de même que  $A \cap C \subset A \cap (B \cup C)$ . On a donc  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ .

► Soit  $x \in A \cap (B \cup C)$ , c'est-à-dire  $x \in A$  et  $x \in B \cup C$ . Il y a deux cas à envisager. Cas 1 :  $x \in A$  et  $x \in B$ . On a alors  $x \in A \cap B$ . Cas 2 :  $x \in A$  et  $x \in C$ . On a alors  $x \in A \cap C$ . Dans les deux cas, on a  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , d'où  $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

**Solution 11.**

On a  $A \subset A \cup B = B \cap C \subset B \subset A \cup B = B \cap C \subset C$ .