

**Exercice 1.**

Soit

$$\mathcal{E} : 5x^2 + 8xy + 5y^2 + \sqrt{2}(y - x) = 8.$$

- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ellipse  $\mathcal{E}$ .
- Tracer  $\mathcal{E}$  avec soin.
- Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{E}$  au point  $M_0(2/3, 2/3)_{\mathcal{E}}$ .
- Quelle est l'aire du disque elliptique de frontière  $\mathcal{E}$  ?

**Exercice 2.**

Soit  $\mathcal{H}$  la courbe d'équation

$$x^2 - 4xy + y^2 + x + y + 1 = 0$$

dans un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}$ .

- Déterminer la nature et les caractéristiques de  $\mathcal{H}$ .
- Tracer  $\mathcal{H}$  avec soin.
- Déterminer les tangente à  $\mathcal{H}$  aux points d'intersection de  $\mathcal{H}$  avec la première bissectrice de  $\mathcal{R}$ .

**Exercice 3.**

Soit  $P$  un polynôme réel de degré trois. Déterminer la nature de l'ensemble  $\Gamma$  d'équation cartésienne

$$P(x) = P(y).$$

**Exercice 4.**

On considère un plan  $\mathcal{P}_\theta$  incliné de  $\theta \in [0, \pi/2[$  par rapport à plan  $\mathcal{P}$ . Déterminer la nature de la projection orthogonale d'un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $R > 0$  du plan  $\mathcal{P}_\theta$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 5.**

Déterminer la nature, en discutant sur le paramètre  $m \in \mathbb{R}$ , de la courbe représentée dans un repère orthonormé par l'équation

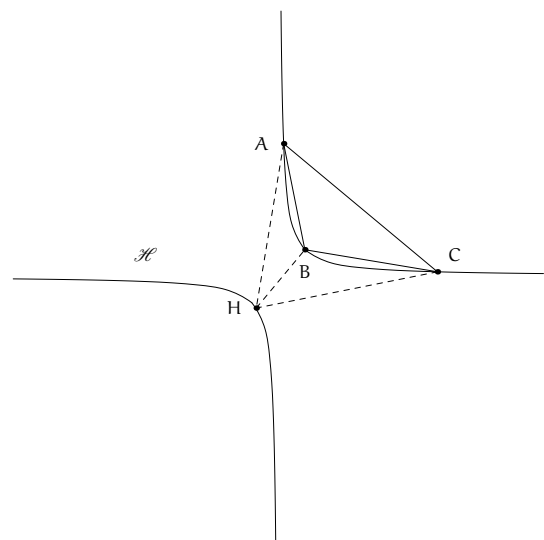
$$mx^2 - 4mx - (m - 1)y^2 + 2 = 0.$$

**Exercice 6.**

Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  tels que les points d'affixes respectives  $z, z^2, z^5$  soient alignés.

**Exercice 7.**

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormé que l'on note  $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $\mathcal{H}$  l'hyperbole équilatère d'équation  $xy = 1$ . Prouver que si  $\mathcal{H}$  contient trois points  $A, B$  et  $C$ , elle contient aussi l'orthocentre du triangle  $ABC$ . (Le fait que les trois hauteurs ont un point d'intersection commun, l'orthocentre, est admis).



**Exercice 8.**

Soit  $\mathcal{E}$ , une ellipse de grand axe  $(AA')$ , de petit axe  $(BB')$  et de centre  $O$ . Démontrer que la somme des carrés des aires des triangles  $OMA$  et  $OMB$  est constante lorsque  $M$  parcourt  $\mathcal{E}$ .

### 1. Solutions

#### Solution 1.

1. Le discriminant associé à l'équation de  $\mathcal{E}$  vaut

$$\delta = 5^2 - 4^2 = 9 > 0,$$

donc  $\mathcal{E}$  est une conique du type ellipse : il s'agit donc d'une ellipse, d'un cercle, d'un point ou de l'ensemble vide. Effectuons un changement de repère orthonormé en posant :  $c = \cos(\theta)$  et  $s = \sin(\theta)$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$  et

$$x = cx' - sy' \quad , \quad y = sx' + cy'.$$

On trouve que l'équation de  $\mathcal{E}$  dans le nouveau repère  $\mathcal{R}'$  est :

$$(5c^2 + 5s^2 + 8cs)x'^2 + (5c^2 + 5s^2 - 8cs)y'^2 + 8(c^2 - s^2)x'y' + \sqrt{2}(s - c)x' + \sqrt{2}(c + s)y' = 8$$

En choisissant  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , on a  $c = s = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et donc :

$$\mathcal{E} : 9x'^2 + y'^2 + 2y' = 8,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{E} : 9x'^2 + (y' + 1)^2 = 9,$$

En notant  $\Omega(0, -1)_{\mathcal{R}'}$  et  $\mathcal{R}''$  le repère obtenu en traduisant  $\mathcal{R}'$  en  $\Omega$ , on obtient l'équation :

$$\mathcal{E} : x''^2 + \frac{y''^2}{3^2} = 1.$$

On reconnaît l'ellipse de centre  $\Omega$ , d'axe focal  $(\Omega y'')$ , de demi grand-axe  $a = 3$  et de demi petit-axe  $b = 1$ .

2. Voici :

#### Solution 2.

1. Le discriminant de  $P$  valant  $-3$ ,  $\mathcal{H}$  est du type hyperbole. Effectuons un changement de repère orthonormé en posant :  $c = \cos(\theta)$  et  $s = \sin(\theta)$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$  et

$$x = cx' - sy' \quad , \quad y = sx' + cy'.$$

On trouve que l'équation de  $\mathcal{E}$  dans le nouveau repère  $\mathcal{R}'$  est :

$$(c^2 + s^2 - 4cs)x'^2 + (c^2 + s^2 + 4cs)y'^2 - 4(c^2 - s^2)x'y' + (c + s)x' + (c - s)y' + 1 = 0$$

En choisissant  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , on a  $c = s = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et donc :

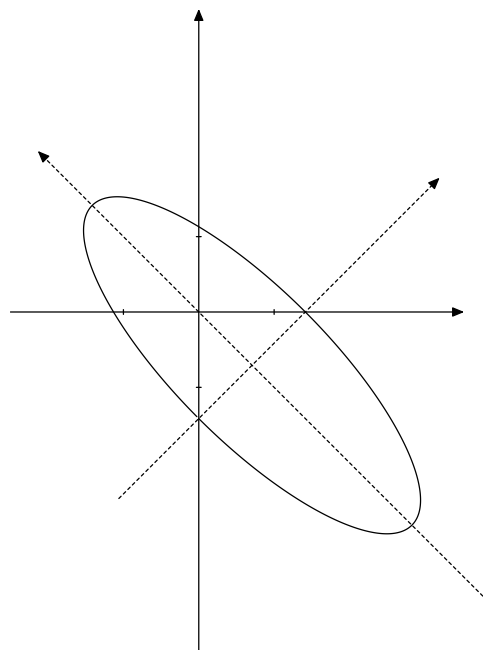
$$\mathcal{E} : -x'^2 + 3y'^2 + \sqrt{2}x' + 1 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{E} : \frac{(x' - 1/\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}/2)^2} - \frac{y'^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1,$$

En notant  $\Omega(1/\sqrt{2}, 0)_{\mathcal{R}'}$  et  $\mathcal{R}''$  le repère obtenu en traduisant  $\mathcal{R}'$  en  $\Omega$ , on obtient l'équation :

$$\mathcal{E} : \frac{x''^2}{(\sqrt{3}/2)^2} - \frac{y''^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1.$$



3. En appliquant la règle du dédoublement des termes, on trouve que la tangente à  $\mathcal{E}$  en  $M_0$  est la droite d'équation :

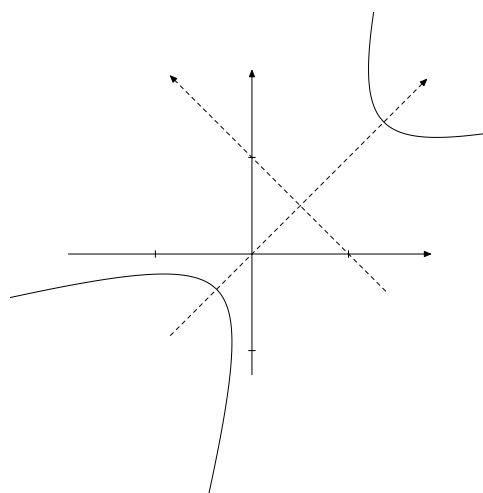
$$\left(6 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x + \left(6 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)y = 8.$$

dans  $\mathcal{R}$ .

4. On a  $\mathcal{A} = \pi \times 3 \times 1 = 3\pi$  unités d'aire.

On reconnaît l'hyperbole de centre  $\Omega$ , d'axe focal  $(\Omega x'')$ , avec  $a = \sqrt{3}/2$  et  $b = 1/\sqrt{2}$ .

2. Voici :



3. On trouve sans peine qu'un point  $M(x, y)_{\mathcal{R}}$  appartient à la première bissectrice de  $\mathcal{R}$  et à  $\mathcal{H}$  si et seulement si

$$y = x \text{ et } x^2 - x - \frac{1}{2} = 0.$$

On trouve donc deux points d'intersection :

$$M_1(\alpha, \alpha)_{\mathcal{R}} \text{ et } M_2(\beta, \beta)_{\mathcal{R}}$$

**Solution 3.**

Quitte à diviser par le coefficient dominant de  $P$ , on peut supposer  $P$  unitaire, i.e. de la forme

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels.}$$

Un point  $M(x, y)_{\mathcal{R}}$  appartient à  $\Gamma$  si et seulement si  $P(x) = P(y)$ , soit encore :

$$x^3 + ax^2 + bx = y^3 + ay^2 + by,$$

i.e.

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + a(x + y) + b) = 0$$

c'est-à-dire

$$x = y \text{ ou } x^2 + xy + y^2 + a(x + y) + b = 0.$$

► La solution  $x = y$  correspond géométriquement à la première bissectrice  $\Delta$  du repère  $\mathcal{R}$ .

► Etudions la courbe d'équation

$$\mathcal{E} : x^2 + xy + y^2 + a(x + y) + b = 0.$$

Effectuons un changement de repère orthonormé en posant :  $c = \cos(\theta)$  et  $s = \sin(\theta)$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$  et

**Solution 4.**

Soit  $\mathcal{R}_\theta = (O, \vec{u}, \vec{v})$  un repère orthonormé de  $\mathcal{P}_\theta$  d'origine le centre  $O$  du cercle  $\mathcal{C}$  dont l'axe des abscisses est parallèle à la droite  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_\theta$ . On note  $O'$  la projection orthogonale de  $O$  sur  $\mathcal{P}$ . On considère  $\mathcal{R}'_\theta$  un repère orthonormé de  $\mathcal{P}$  d'origine  $O'$  et dont l'axe des abscisses est parallèle à celui de  $\mathcal{R}_\theta$ . On note  $M'$  le projeté orthogonal de  $M \in \mathcal{P}_\theta$  sur  $\mathcal{P}$ . Si  $M(x, y)_{\mathcal{R}_\theta}$ , on a  $M'(x', y')_{\mathcal{R}'_\theta}$  avec :

$$x' = \pm x \text{ et } y' = \pm \cos(\theta)y.$$

**Solution 5.**

► Pour  $m = 0$ , c'est l'ensemble vide.

► Pour  $m > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $m = 1/\alpha^2$  et l'équation devient

$$\frac{(x - 2)^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} y^2 = \frac{4 - 2\alpha^2}{\alpha^2}.$$

► Pour  $m = 1/2$ , la courbe est réduite au point de coordonnées  $(2, 0)$ .

► Pour  $m < 1/2$ , c'est encore l'ensemble vide. Pour  $1/2 < m < 1$ , c'est une ellipse.

où

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \beta = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

On trouve alors sans peine l'équation des tangentes  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  à  $\mathcal{H}$  en  $M_1$  et  $M_2$  :

$$\mathcal{T}_1 : x + y = 1 - \sqrt{3}, \quad \mathcal{T}_2 : x + y = 1 + \sqrt{3}.$$

$$x = cx' - sy' \text{ , } y = sx' + cy'.$$

On trouve que l'équation de  $\mathcal{E}$  dans le nouveau repère  $\mathcal{R}'$  est :

$$(c^2 + s^2 + cs)x'^2 + (c^2 + s^2 - cs)y'^2 + (c^2 - s^2)x'y' + a(c + s)x' + a(c - s)y' + b = 0$$

En choisissant  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , on a  $c = s = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et donc :

$$\mathcal{E} : \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + a\sqrt{2}x' + b = 0.$$

En notant  $\Omega(-\alpha\sqrt{2}/3, 0)_{\mathcal{R}'}$  et  $\mathcal{R}''$  le repère obtenu en translatant  $\mathcal{R}'$  en  $\Omega$ , on obtient l'équation :

$$\frac{3}{2}x''^2 + \frac{1}{2}y''^2 = \frac{a^2 - 3b}{3}.$$

► Conclusion :

• Si  $a^2 < 3b$ ,  $\mathcal{E} = \emptyset$  et  $\Gamma = \Delta$ .

• Si  $a^2 = 3b$ ,  $\mathcal{E} = \{\Omega\}$  et  $\Gamma = \Delta \cup \{\Omega\}$ .

• Si  $a^2 > 3b$ ,  $\mathcal{E}$  est une ellipse et  $\Gamma = \Delta \cup \mathcal{E}$ .

On a donc  $M \in \mathcal{C}$  si et seulement si

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

i.e.

$$\frac{x'^2}{R^2} + \frac{y'^2}{R^2 \cos^2(\theta)} = 1.$$

La projection orthogonale de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{P}_\theta$  est donc l'ellipse de centre  $O'$ , de demi grand-axe  $a = R$ , de demi petit-axe  $b = R \cos(\theta)$  et d'axe focal l'axe des abscisses de  $\mathcal{R}'_\theta$ .

► Pour  $m = 1$ , c'est la réunion des droites verticales  $x = 2 \pm \sqrt{2}$ .

► Pour  $m > 1$ , c'est une hyperbole.

► Pour  $m < 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $m = -1/\alpha^2$  et l'équation devient

$$\frac{(x - 2)^2}{\alpha^2} - \frac{1 + \alpha^2}{\alpha^2} y^2 = \frac{4 + 2\alpha^2}{\alpha^2}.$$

C'est une hyperbole d'axe  $(Ox)$ , quel que soit  $m < 0$ .

**Solution 6.**

Nous remarquons d'abord que  $z \in \mathbb{R}$  est une solution évidente. Désormais nous supposons donc  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Notons  $A(z)$ ,  $B(z^2)$  et  $C(z^5)$ . Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\lambda(z^2 - z) = z^5 - z$ . Cela équivaut à dire que le nombre

$$\frac{z^5 - z}{z^2 - z} = \frac{z^4 - 1}{z - 1} = z^3 + z^2 + z + 1$$

est réel, ce qui se traduit encore par la condition

$$z^3 + z^2 + z = \bar{z}^3 + \bar{z}^2 + \bar{z}.$$

Cette égalité équivaut à

$$(z - \bar{z})(z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2 + z + \bar{z} + 1) = 0.$$

c'est-à-dire (sachant que  $z \notin \mathbb{R}$ )

$$z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2 + z + \bar{z} + 1 = 0.$$

En posant  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels on obtient

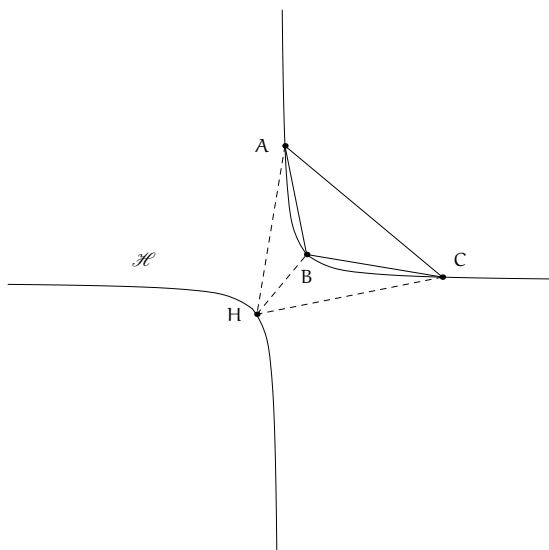
$$3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0.$$

Il s'agit d'une hyperbole  $\mathcal{H}$  dont l'équation réduite est

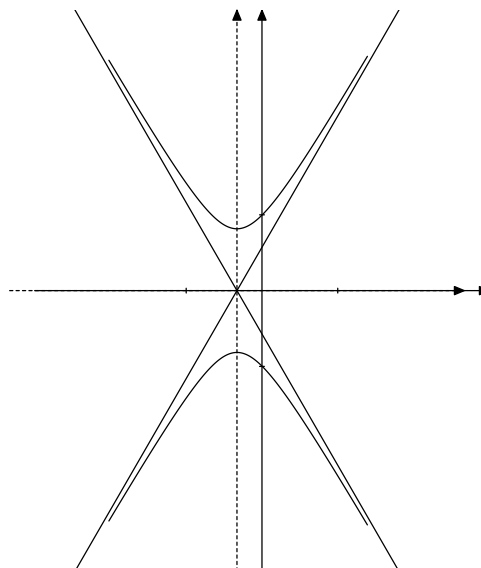
$$\frac{y'^2}{2/3} - \frac{x'^2}{2/9} = 1$$

**Solution 7.**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points deux à deux distincts appartenant à  $\mathcal{H}$ , d'abscisses respectives  $a, b$  et  $c$ . Soit  $H$  l'orthocentre de  $ABC$ .



dans le repère  $\mathcal{R}'$  translaté de  $\mathcal{R}$  au point  $\Omega(-1/3, 0)_{\mathcal{R}}$ . L'ensemble recherché est donc la réunion de l'axe réel et de l'hyperbole  $\mathcal{H}$ .



Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{BC}$  sont

$$\left( c - b, \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) = \frac{c - b}{bc} (bc, -1).$$

La droite  $(AH)$  étant orthogonale à ce vecteur, on en déduit (via le produit scalaire) une équation de  $(AH)$  :

$$(AH) : bc(x - a) - y + \frac{1}{a} = 0.$$

En permutant circulairement  $a, b$  et  $c$ , on obtient :

$$(BH) : ac(x - b) - y + \frac{1}{b} = 0.$$

Un calcul sans difficulté aboutit aux coordonnées du point d'intersection  $H$  entre  $(AH)$  et  $(BH)$  :

$$\left( -\frac{1}{abc}, -abc \right).$$

Ces coordonnées vérifient l'équation  $xy = 1$ , donc  $H \in \mathcal{H}$  car.

**Solution 8.**

Soit  $\mathcal{R}$  un repère de centre  $O$  du plan dans lequel  $\mathcal{E}$  admet une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ avec } 0 < b < a.$$

On a  $A(a, 0)_{\mathcal{R}}$  et  $B(0, b)_{\mathcal{R}}$ . Soit  $M(x, y)_{\mathcal{R}}$  un point de  $\mathcal{E}$ . Les aires  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ , respectivement de  $OMA$  et  $OMB$ , valent clairement

$$\frac{a|y|}{2} \text{ et } \frac{b|x|}{2},$$

ainsi, la somme

$$\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 = \frac{a^2 y^2 + b^2 y x^2}{4} = \frac{a^2 b^2}{4}$$

est bien indépendante du point  $M$ .