

**Exercice 1.**

Why are the three perpendicular bisectors of a triangle concurrent? Deduce from this fact that the three altitudes are also concurrent (their intersection point is called the *orthocenter*).

**Exercice 2.**

Soient  $A, B, C$  trois points deux à deux distincts d'affixes  $a, b, c$ .

1. Prouver que  $ABC$  est un triangle équilatéral direct si et seulement si

$$a + jb + j^2c = 0,$$

et équilatéral indirect si et seulement si

$$a + jc + j^2b = 0.$$

2. Prouver que  $ABC$  est un triangle équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

**Exercice 3.**

Dans le plan  $\mathbf{P}$  muni d'un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}$ , on considère les trois points  $A(1, 2)_{\mathcal{R}}$ ,  $B(2, 3)_{\mathcal{R}}$  et  $C(4, 0)_{\mathcal{R}}$ . Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

**Exercice 4.**

L'espace  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormé direct. Montrer que les deux droites  $\mathcal{D} \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$  et  $\mathcal{D}' \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$  appartiennent à un même plan  $\mathcal{P}$ , dont on donnera une équation cartésienne.

**Exercice 5.**

L'espace  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}$ . Soient  $\mathcal{D} \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$  et  $\mathcal{D}' \begin{cases} y = 3x \\ z = 1 \end{cases}$ . Montrer qu'il existe un unique couple de plans  $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  tel que :

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}, \mathcal{D}' \subset \mathcal{P}', \mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$$

Donner des équations cartésiennes de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ .

**Exercice 6.**

Soient  $\vec{a}, \vec{b}$  deux vecteurs de l'espace. On cherche à résoudre dans  $E$  l'équation vectorielle

$$\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}.$$

1. Examiner les cas où  $\vec{b} = \vec{0}$  ou  $\vec{a} = \vec{0}$ .
2. On suppose  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  non orthogonaux. Résoudre l'équation.
3. On suppose  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  orthogonaux et non nuls. En utilisant l'identité de Lagrange (sans oublier de dessiner !), trouver une solution particulière  $\vec{x}_0$  de l'équation.
4. Résoudre alors le problème de la division vectorielle.

**Exercice 7.**

Soient  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  une base de  $\mathbf{E}$  et  $\vec{u}', \vec{v}'$  les vecteurs de  $\mathbf{E}$  définis par,

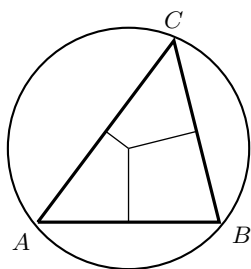
$$\vec{u}' = \vec{u} + 3\vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{v}' = 3\vec{v} - \vec{w}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur  $\vec{w}'$  de coordonnées  $(x, y, z)_{\mathcal{B}}$  appartienne au plan vectoriel  $\text{vect}(\vec{u}', \vec{v}')$ .

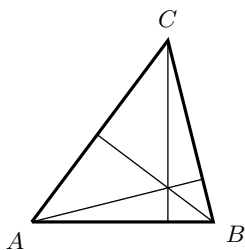
### 1. Solutions

**Solution 1.**

Let  $ABC$  be three non-collinear points. There exists a unique circle through  $A, B$  and  $C$ . Clearly the perpendicular line from the circle's center to any side of the triangle  $ABC$  intersects it in its midpoint. Therefore these lines are exactly the perpendicular bisectors of the triangle.



Now draw the three altitudes of the triangle  $ABC$ .



**Solution 2.**

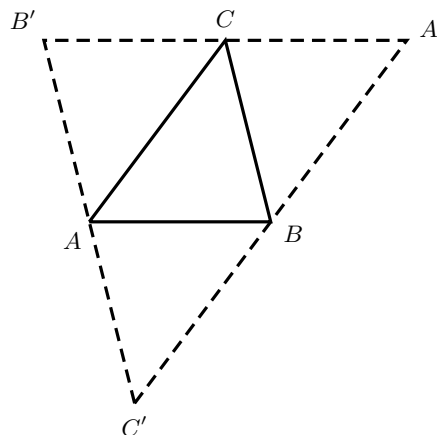
1. Le triangle  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si  $AB = AC$  et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3},$$

c'est-à-dire  $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -j^2$ , d'où, puisque  $1 + j + j^2 = 0$ ,  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si  $ja + j^2b + c = 0$  et en multipliant par  $j^2$ ,  $a + jb + j^2c = 0$ .

**REMARQUE** – Voici une bien meilleure preuve, faisant appel aux transformations complexes affines. Un triangle est équilatéral direct si et seulement si s'il se ramène par une similitude directe ou une translation au triangle équilatéral direct d'affixes  $1, j, j^2$ . Or pour ce dernier l'équation  $a + bj + cj^2 = 0$  est vraie car  $1 + j \times j + j^2 \times j^2 = 0$ . Pour conclure il suffit alors de remarquer que l'équation  $a + bj + cj^2 = 0$  est invariante sous les transformations de la forme  $(a, b, c) \mapsto (\alpha a + \beta, \alpha b + \beta, \alpha c + \beta)$  où  $\alpha \neq 0$ .

In order to prove that the altitudes are concurrent we will construe them as perpendicular bisectors of another triangle. In fact, we construct a new triangle  $A'B'C'$  as follows : each side of the new triangle passes through a vertex of the old triangle and is parallel to opposite side.



By construction  $ABCB'$  is a parallelogram, hence  $AB = B'C'$ ; similarly  $AC = A'B'$ . It follows that  $C$  is the midpoint of the side  $[A'B']$ . Making the same reasoning for the other sides, we deduce that the altitudes of the triangle  $ABC$  are nothing else than the perpendicular bisectors of the triangle  $A'B'C'$ .

Pour les configurations indirectes, on peut faire les mêmes calculs ou bien on remarque que changer l'orientation d'un triangle revient à permuter  $j$  et  $j^2$  dans la relation précédente.

2. D'après ce qui précède,  $ABC$  est équilatéral si et seulement si  $p = (a + j^2b + jc)(a + jb + j^2c) = 0$ . Or

$$\begin{aligned} p &= a^2 + jab + j^2ac + j^2ab + b^2 \\ &\quad + jbc + jac + j^2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (j + j^2)ab \\ &\quad + (j + j^2)ac + (j + j^2)bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc. \end{aligned}$$

**REMARQUE** – L'utilisation de la relation bien connue  $1 + j + j^2 = 0$  permet d'alléger sensiblement les calculs.

**Solution 3.**

L'aire du triangle  $ABC$  est égale à  $\frac{1}{2} |\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{5}{2}$ .

**Solution 4.**

On trouve  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = A$  de coordonnées  $(3, 0, 1)$ .  $\mathcal{D} = A + \text{vect}(\vec{u})$  avec  $\vec{u} = (2, 1, 1)$  et  $\mathcal{D}' = A + \text{vect}(\vec{u}')$

avec  $\vec{u}' = (1, 3, 1)$ . Puisque  $\vec{u} \wedge \vec{u}' = (-2, -1, 5)$ , une équation cartésienne de  $\mathcal{D}$  est  $-2x - y + 5z + 1 = 0$ .

**Solution 5.**

$\mathcal{D} = A + \text{vect}(\vec{u})$  avec  $A(-1, 1, 0)_{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{u}(1, 2, 1)_{\mathcal{E}}$  et  $\mathcal{D}' = A' + \text{vect}(\vec{u}')$  avec  $A'(0, 0, 1)_{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{u}'(1, 3, 0)_{\mathcal{E}}$ .  $\mathcal{D}$  et

$\mathcal{D}'$  ont le même vecteur normal  $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{u}' = (-3, 1, 1)_{\mathcal{E}}$ .  $\mathcal{D}$  passe par  $A$  et  $\mathcal{D}'$  par  $A'$ , leurs équations cartésiennes respectives sont donc  $3x - y - z + 4 = 0$  et  $3x - y - z + 1 = 0$ .

**Solution 6.**

1. Examinons plusieurs cas de figure ...

- ▶ Si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont nuls, l'ensemble des solutions est banallement égal à  $\mathbf{E}$ .
- ▶ Si  $\vec{a} \neq \vec{0}$  et  $\vec{b} = \vec{0}$ , l'ensemble des solutions est clairement égal à la droite vectorielle  $\text{vect}(\vec{a})$ .
- ▶ Si  $\vec{a} = \vec{0}$  et  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , l'ensemble des solutions est  $\emptyset$ .

2. Puisque  $\forall \vec{x} \in \mathbf{E}$ , on a  $\vec{a} \wedge \vec{x} \perp \vec{a}$ , l'orthogonalité des vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  est une condition *nécessaire* à l'existence d'une solution à l'équation. Dans le cas où  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  ne sont pas orthogonaux, l'ensemble des solutions est donc  $\emptyset$ .

3. Recherchons une solution particulière sous la forme  $\vec{x}_0 = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$  avec  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Appliquons la formule de Lagrange,

$$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b} = -\|\vec{a}\|^2 \vec{b}.$$

Il suffit donc de poser  $\lambda = -\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}$  : le vecteur

$$\vec{x}_0 = -\frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}$$

est une solution particulière de l'équation.

4. Il reste à étudier le cas où  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont orthogonaux non nuls. Notons  $\vec{x}_0$  la solution particulière trouvée à la question précédente. Un vecteur  $\vec{x}$  de  $\mathbf{E}$  est solution si et seulement si

$$\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b} \text{ si et seulement si } \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{x}_0$$

ie  $\vec{a} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$ . L'ensemble des solutions est donc

$$\vec{x}_0 + \text{vect}(\vec{a}).$$

**Solution 7.**

Puisque les vecteurs  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}'$  ne sont pas colinéaires,  $\vec{w}' \in \text{vect}(\vec{u}', \vec{v}')$  si et seulement si

$$\text{Det}(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}') = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 3 & y \\ 3 & -1 & z \end{vmatrix} = 0$$

ie  $-9x + y + 3z = 0$ .