

**Exercice 1.**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation

$$y' + \operatorname{th}(t)y = \sinh(t).$$

**Exercice 2.**

Résoudre l'équation différentielle :

$$(1 + t^2)x' - x = 1$$

**Exercice 3.**

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(x + 1)y' + xy = x^2 - x + 1.$$

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$ .
3. Déterminer la solution vérifiant la condition initiale  $y(1) = 1$ .

**Exercice 4.**

Résoudre les équations suivantes

- |                           |                                 |
|---------------------------|---------------------------------|
| 1. $y' + y = x$ ;         | 5. $y' + y = e^{2x}$ ;          |
| 2. $y' + y = e^{-x}$ ;    | 6. $y' + y = e^{-x} + e^{2x}$ ; |
| 3. $y' + y = xe^{-x}$ ;   | 7. $y' + y = \sin(x)$ ;         |
| 4. $y' + y = x^2e^{-x}$ ; | 8. $y' + y = \cos(x)e^x$ .      |

**Exercice 5.**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sin(x).$$

**Exercice 6.**

Soit  $\omega \in \mathbb{R}$ . Résoudre successivement les équations :

- |                               |                            |
|-------------------------------|----------------------------|
| 1. $y'' + y = \sin(\omega x)$ | 2. $y'' + y = \sin^3(x)$ . |
|-------------------------------|----------------------------|

### 1. Solutions

**Solution 1.**

Puisque

$$\int \operatorname{th}(t) dt = \ln(\cosh(t)) = A(t),$$

la fonction

$$y_0 : t \mapsto e^{-A(t)} = \frac{1}{\cosh(t)}$$

est une solution non nulle de l'équation homogène. Appliquons la méthode de la variation de la constante : les solutions sont de la forme  $\lambda y_0$  avec  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que

**Solution 2.**

Résolvons d'abord l'équation homogène associée :

$$(1 + t^2)x' - x = 0 \iff x' - \frac{1}{1 + t^2}x = 0$$

Une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est  $t \mapsto \arctan t$ . Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

**Solution 3.**

1.  $y = x - 2$  est solution.

2. Posons  $I_1 = ]-\infty, -1[$  et  $I_2 = ]-1, +\infty[$ . Sur  $I_1$  et  $I_2$ ,  $x \mapsto x + 1$  ne s'annule pas, et une primitive de  $x \mapsto \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$  est  $x \mapsto x - \ln|x+1|$ . Sur  $I_k$  la solu-

**Solution 4.**

La solution générale de (H) (qui est la même équation pour tous les numéros de cet exercice) est

$$x \mapsto \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \mapsto ax + b.$$

On aboutit à  $a = 1, a + b = 0$ , et ainsi  $a = 1$  et  $b = -1$ . Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto x - 1 + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \mapsto axe^{-x}.$$

On aboutit à  $a = 1$ . Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto xe^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{\lambda'(t)}{\cosh(t)} = \sinh(t),$$

ie

$$\lambda(t) = \int \cosh(t) \sinh(t) dt = \int \frac{1}{2} \sinh(2t) dt = \frac{1}{4} \cosh(2t) + k$$

où  $k \in \mathbb{R}$ . les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{\cosh(2t)}{4 \cosh(t)} + \frac{k}{\cosh(t)}$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ .

$t \mapsto Ce^{\arctan t}$  où  $C \in \mathbb{R}$ . Ici, pas besoin de la méthode de la variation de la constante, on voit tout de suite que la fonction constante égale à  $-1$  est une solution particulière. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions  $t \mapsto -1 + Ce^{\arctan t}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

tion générale est  $y_k = x - 2 + \lambda_k|x + 1|e^{-x}$ .

On peut recoller les solutions sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  est donc  $\mathcal{S} = \{x - 2 + \lambda(x + 1)e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

3. Avec la condition  $y(1) = 1$ , on obtient  $\lambda = e$ .

$$x \mapsto (ax^2 + bx)e^{-x}.$$

On aboutit à  $a = 1/2$  et  $b = 0$ . Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{x^2}{2}e^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \mapsto (ax^3 + bx^2 + cx)e^{-x}.$$

On aboutit à  $a = 1/3$  et  $b = c = 0$ . Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{x^3}{3}e^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \mapsto ae^{2x}.$$

On aboutit à  $a = 1/3$ . Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. D'après le principe de superposition et les calculs menées en 2. et 5., la fonction suivante est une solution particulière de (E)

$$x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} + xe^{-x}.$$

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} + xe^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

7. Le second membre est du type polynôme-sinus, on passe sur  $\mathbb{C}$  et recherche une solution particulière de l'équation

$$y' + y = e^{ix}$$

de la forme

$$x \mapsto ae^{ix}.$$

On aboutit à  $a = (1 - i)/2$ . Puisque la partie imaginaire de

$$\frac{1 - i}{2}e^{ix}$$

est solution de (E) et vaut

$$\frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x),$$

**Solution 5.**

Passons sur  $\mathbb{C}$  et recherchons une solution particulière de l'équation  $y'' + 4y' + 5y = e^{(-2+i)x}$ . Puisque les solutions de l'équation caractéristique sont  $-2 \pm i$ , il existe une solution particulière de la forme

$$f : x \mapsto axe^{(-2+i)x}.$$

On a, pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((-2 + i)ax + a)e^{(-2+i)x} \\ &= ((-2 + i)^2 ax + 2(-2 + i)a)e^{(-2+i)x} \end{aligned}$$

et  $f''(x) + 4f'(x) + 5f(x) = 2iae^{(-2+i)x}$ . La fonction  $f$  est donc solution si et seulement si  $a = 1/2i = -i/2$ . La partie imaginaire de cette solution particulière est une solution de l'équation initiale et vaut

**Solution 6.**

► L'équation homogène admet pour solutions les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

► PREMIER CAS  $\omega = \pm 1$

Passons sur  $\mathbb{C}$  et résolvons les équations

$$y'' + y = e^{\varepsilon ix}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

puisque  $i\omega$  est solution simple de l'équation caractéristique, (E) admet une solution particulière de la forme

$$x \mapsto axe^{\varepsilon i\omega x}.$$

On obtient  $a = -\varepsilon i/2$ . Puisque la partie imaginaire de cette fonction est solution de l'équation (E) et vaut

les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x) + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

8. Le second membre est du type polynôme-cosinus, on passe sur  $\mathbb{C}$  et recherche une solution particulière de l'équation

$$y' + y = e^{(1+i)x}$$

de la forme

$$x \mapsto ae^{(1+i)x}.$$

On aboutit à  $a = (2 - i)/5$ . Puisque la partie réelle de

$$\frac{2 - i}{5}e^{(1+i)x}$$

est solution de (E) et vaut

$$\frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x),$$

les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x) + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$f_0 : x \mapsto -\frac{x \cos(x)e^{-2x}}{2}.$$

La solution générale de (E<sub>H</sub>) s'écrivant

$$x \mapsto [\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)]e^{-2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

Les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\frac{x \cos(x)e^{-2x}}{2} + [\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)]e^{-2x}$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$x \mapsto -\varepsilon \frac{x \cos(x)}{2},$$

les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\varepsilon \frac{x \cos(x)}{2} + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \quad \lambda, \mu.$$

► SECOND CAS  $\omega \neq \pm 1$

Passons sur  $\mathbb{C}$  et résolvons l'équation

$$y'' + y = e^{i\omega x}.$$

puisque  $i\omega$  est solution simple de l'équation caractéristique, cette équation admet une solution particulière de la forme

$$x \mapsto ae^{i\omega x}.$$

On obtient  $a = 1/(1 - \omega^2)$ . Puisque la partie imaginaire de cette fonction est solution de l'équation (E) et vaut

$$x \mapsto \frac{\sin(\omega x)}{1 - \omega^2},$$

les solutions de **(E)** sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 - \omega^2} + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

► CONCLUSION

Puisque  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin^3(x) = \frac{3 \sin(x) - \sin(3x)}{4},$$

d'après les calculs précédents et le principe de superposition, la fonction  $f_0$  suivante est une solution particulière de **(E)**,

$$f_0 : x \mapsto -\frac{3x \cos(x)}{8} + \frac{\sin(3x)}{32}.$$

Les solutions de **(E)** sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto f_0(x) + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$