

Exercice 1.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouver que

$$z^2 \in \mathbb{R}^- \implies \operatorname{Re}(z) = 0.$$

Que pensez-vous de la réciproque ?

Exercice 2.

On identifie le plan \mathscr{P} à \mathbb{C} . Quelle est l'image par l'exponentielle d'une droite verticale ? D'une droite horizontale ?

Exercice 3.

Soit $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$. On note logarithme de a l'ensemble des nombres complexes z tels que $e^z = a$.

$$\ell n(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid e^z = a\}.$$

Puis on note

$$a^b = e^{b \ell n(a)} = \{e^{bz} \mid z \in \mathbb{C}, e^z = a\}.$$

1. Donner toutes les valeurs de $\ell n(a)$.
2. Montrer que a^b est une unique valeur *si et seulement si* $b \in \mathbb{Z}$.
3. Donner toutes les valeurs de i^i .
4. Prouver formellement et sans ce qui précède que i^i est réel.

Exercice 4.

Dresser le tableau de variation et tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x \cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Exercice 5.

Quelques simplifications trigonométriques usuelles.

1. Donner une formule reliant $\cos(x)$ et $\tan(x)$ valable sur $] -\pi/2, \pi/2[$. En déduire une formule reliant $\sin(x)$ et $\tan(x)$ sur le même intervalle.
2. Quelle est l'ensemble de définition de la fonction définie par :

$$g(x) = \cos \left[\arctan \left(\sin \left(\arctan(x) \right) \right) \right] ?$$

3. Simplifier $g(x)$: les fonctions circulaires directes et réciproques doivent disparaître !

Exercice 6.

On pose $f(x) = \arctan(\sinh x)$ et $g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\cosh x}\right)$.

1. Vérifier que f et g sont bien définies sur \mathbb{R} . Sur quels domaines sont elles dérivables ?
2. Calculer f' et g' sur leurs domaines de définition, et en déduire que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \geq 0$. Quelle relation existe-t-il entre $f(x)$ et $g(x)$ pour $x < 0$?

Exercice 7.

On pose $y = \arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)$. Calculer $\cos(4y)$ et en déduire la valeur de y .

1. Solutions

Solution 1.

► Soit $z \in \mathbb{C}$. Ecrivons z sous forme algébrique,

$$z = x + iy,$$

où x et y sont réels. Raisonnons par contraposition : supposons $x \neq 0$; alors

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Solution 2.

Les droites verticales sont transformées en cercles de centre O et les droites horizontales en demi-droites issues (et privées) de O : soient x_0 et y_0 deux nombres réels.

► Lorsque y décrit \mathbb{R} , l'image de $e^{x_0+iy} = e^{x_0}e^{iy}$ décrit le cercle de centre O et de rayon e^{x_0} .

Solution 3.

1. Ecrivons $a = re^{i\varphi}$ et $z = x + iy$ avec $r, \varphi, x, y \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Alors

$$\begin{aligned} e^z = a &\iff e^{x+iy} = re^{i\varphi} \\ &\iff e^x e^{iy} = re^{i\varphi} \\ &\iff e^x = r \text{ et } e^{iy} = e^{i\varphi} \\ &\iff x = \ln(r) \text{ et } y = \varphi + 2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc, avec $\arg(a) \in [0, 2\pi[$ on a

$$\ln(a) = \ln |a| + i \arg(a) + 2\pi i\mathbb{Z}.$$

2. Notons $b = \alpha + i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a^b &= e^{b \ln(a)} \\ &= e^{(\alpha+i\beta)(\ln |a| + i \arg(a) + 2\pi i\mathbb{Z})} \\ &= e^{\alpha \ln |a| - \beta \arg(a)} e^{i(\beta \ln |a| + \alpha \arg(a))} \\ &\quad \times e^{-2\beta\pi\mathbb{Z}} e^{2\alpha\pi i\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Solution 4.

On remarque que f est impaire et qu'elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} puisque \cosh ne s'annule pas. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x - \operatorname{th}(x),$$

ainsi

$$f'(x) = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \operatorname{th}^2(x) \geq 0.$$

La fonction f est donc croissante sur \mathbb{R} . On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Deux cas de figure sont à envisager : soit $y = 0$ et alors $z^2 = x^2 > 0$ et donc $z^2 \notin \mathbb{R}^-$. Soit $y \neq 0$ et donc $\operatorname{Im}(z^2) = 2xy \neq 0$ et $z^2 \notin \mathbb{R}^-$.

► La réciproque est banalement vraie.

► Lorsque x décrit \mathbb{R} , $e^{x+iy_0} = e^x e^{iy_0}$ décrit la demi-droite rayonnant du point O (exclu) avec un angle y_0 par rapport au demi-axe des abscisses positives.

REMARQUE — Cela vient du fait que e^x décrit $]0, +\infty[$ lorsque x décrit l'ensemble \mathbb{R} .

L'expression $e^{-2\beta\pi\mathbb{Z}}$ est une unique valeur si et seulement si $\beta = 0$; et $e^{2\alpha\pi i\mathbb{Z}}$ est une unique valeur si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Z}$.

3. Comme

$$\ln(i) = i\frac{\pi}{2} + 2\pi i\mathbb{Z}.$$

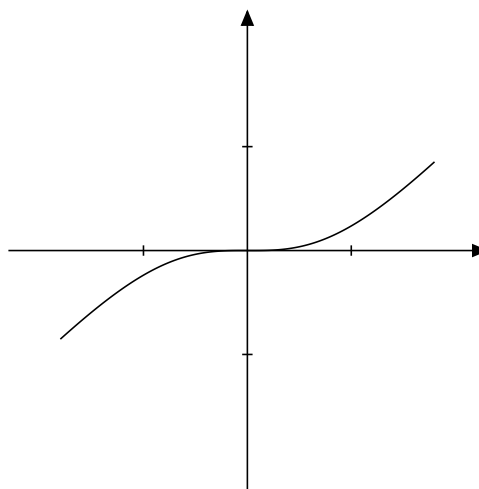
on obtient

$$i^i = e^{i(i\pi/2 + 2\pi i\mathbb{Z})} = e^{-\pi/2} e^{-2\pi\mathbb{Z}}.$$

4. On part de $1^i = 1$.

$$(-i)^i = 1 \Rightarrow (-i)^i i^i = 1 \Rightarrow i^i = (-i)^{-i}.$$

Cela signifie que le conjugué de i^i est encore i^i . Autrement dit, i^i est réel.



Solution 5.

1. On a, $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{1 - \sin^2(x)},$$

et ainsi,

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}, \quad \sin^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}.$$

2. La fonction arctangente étant définie sur \mathbb{R} , g est définie sur \mathbb{R} .

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\alpha = \arctan(x)$. On a, d'après les formules démontrées à la question a.,

$$\sin^2(\alpha) = \frac{x^2}{x^2 + 1},$$

Solution 6.

1. f est clairement définie et dérivable sur \mathbb{R} . Puisque

$$0 < \frac{1}{\cosh x} \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, g \text{ est définie sur } \mathbb{R}.$$

L'égalité $\frac{1}{\cosh x} = 1$ n'ayant lieu que pour $x = 0$, g est dérivable sur \mathbb{R}^* .

2. On trouve $f'(x) = \frac{1}{\cosh x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \frac{\sinh x}{|\sinh x| \cosh x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*. \text{ En parti-}$$

Solution 7.

Y a pas d'secret : il faut faire apparaître du sinus puisque y est un arcsinus ...

$$\begin{aligned} \cos(4y) &= 1 - 2 \sin^2(2y) = 1 - 8 \sin^2(y) \cos^2(y) \\ &= 1 - 8u^2 [1 - u^2] \end{aligned}$$

où $u = \sin(y) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Après tout calcul,

$$\cos(4y) = -u = \sin(-y) = \cos(\pi/2 + y).$$

On a donc

$$4y \equiv \frac{\pi}{2} + y[2\pi] \text{ ou } 4y \equiv -\frac{\pi}{2} - y[2\pi],$$

et puisque $\arctan(x) = \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\sin(\alpha)$ a le même signe que x , donc

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Posons $\beta = \arctan(\sin(\alpha))$, on a

$$\cos^2(\beta) = \frac{1}{1 + \sin^2(\alpha)} = \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1},$$

et puisque $\beta \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\cos(\beta) > 0$, on a

$$f(x) = \cos(\beta) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 + 2x^2}}.$$

culier $f' = g'$ sur \mathbb{R}_+ , donc $f - g$ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et comme $f(0) = 0 = g(0)$ et que f et g sont continues sur \mathbb{R} , on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \geq 0$.

On remarque que f est impaire et g est paire, donc pour tout $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -g(-x) = -g(x)$.

c'est-à-dire

$$y \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi/3] \text{ ou } y \equiv -\frac{\pi}{10} [2\pi/5].$$

Or y est l'arcsinus d'un nombre positif donc $y \in [0, \pi/2]$. Or la seule solution de la première congruence appartenant à cet intervalle est $\pi/6$ qui n'est donc pas y puisque

$$\sin(y) \neq \frac{1}{2} = \sin(\pi/6);$$

la seule solution de la seconde congruence appartenant à $[0, \pi/2]$ étant $3\pi/10$, nécessairement $y = \frac{3\pi}{10}$.