Colle n° 1 — Logique. Exponentielle, logarithme, puissances

Exercice 1.

Traduire en toutes lettres les huit propositions suivantes lorsque x désigne un homme, y un film et que $p(x, y)$ est la proposition «L'individu x a vu le film y».

1. $\forall x, \forall y, p(x, y)$;
2. $\exists x, \forall y, p(x, y)$;
3. $\exists y, \forall x, p(x, y)$;
4. $\forall x, \exists y, p(x, y)$;
5. $\exists x, \exists y, p(x, y)$;
6. $\exists y, \exists x, p(x, y)$;
7. $\forall y, \exists x, p(x, y)$.

Exercice 2.

Soient x et y deux nombres réels. Montrer que $|x + y| = |x| + |y| \iff xy \geqslant 0$.

Exercice 3.

Rechercher parmi les affirmations suivantes lesquelles sont synonymes de la phrase...

S'il ne pleut pas ce soir, alors je vais chez mon oncle.

1. S'il pleut ce soir, je ne vais pas chez mon oncle.
2. Si je ne vais pas chez mon oncle, il pleuvra ce soir.
3. Si je ne vais pas chez mon oncle, alors il ne pleut pas.
4. Si je vais chez mon oncle ce soir, alors il pleut.
5. Si je vais chez mon oncle, alors il ne pleut pas.
6. S'il pleut ce soir, je vais chez mon oncle.

Exercice 4.

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P à coefficients réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = P(x).$$

Exercice 5.

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6.

Soient $0 < a < b$. Prouver que, $\forall x > 0$,

$$ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b.$$

Exercice 7.

Etudier en $+\infty$ les expressions suivantes :

1. $\dfrac{e^{-\sqrt{\ell n(n)}}}{1/n}$
2. $\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{1/n^2}$
3. $\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\,\ell n(n)}$
4. $\dfrac{n}{(\ell n(n))^{-\ell n\, n}}$

Exercice 8.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer les deux implications suivantes.

$$\forall \varepsilon > 0, \ |a| < \varepsilon \implies a = 0,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ |a| \leqslant \varepsilon \implies a = 0.$$

1. Solutions

Solution 1.

1. Chaque individu a vu tous les films.
2. Il existe un individu qui a vu tous les films.
3. Il existe un film qui a été vu par tous les individus.
4. Chaque individu a vu au moins un film.
5. Il existe un individu qui a vu au moins un film.
6. Il existe un film qui a été vu par au moins un individu.
7. Chaque film a été vu par au moins un individu.

(**5.** et **6.** sont équivalents.)

Solution 2.

► $(\Leftarrow)$: Supposons que $xy \geqslant 0$. Alors x et y ont le même signe. Si x et y sont tous les deux positifs, $x+y$ est aussi positif, d'où $|x+y| = x+y = |x|+|y|$, tandis que si x et y sont tous les deux négatifs, $x+y$ est aussi négatif, et $|x+y| = -x-y = |x|+|y|$.

► $(\Rightarrow)$ Pour montrer l'implication dans l'autre sens (de gauche à droite), on peut raisonner par contraposition, c'est-à-dire prouver que $xy < 0 \Rightarrow |x+y| \neq |x|+|y|$. Supposons donc que $xy < 0$. Alors x et y sont non nuls et de signes opposés. Quitte à échanger x et y, on peut supposer que $y < 0 < x$, et on a donc $|x| = x$, $|y| = -y$. Il y a alors deux cas à distinguer :
► si $x \geqslant -y$, alors $|x+y| = x+y < x-y = |x|+|y|$;
► si $x < -y$, alors $|x+y| = -x-y < x-y = |x|+|y|$;
Dans tous les cas, on a bien $|x+y| \neq |x|+|y|$.

Solution 3.

Seule la deuxième proposition est synonyme de la phrase en italique. Il s'agit en fait de la contraposée de l'implication qu'est l'énoncé initial.

Solution 4.

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un polynôme P réel tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin(x) = P(x).$$

Soit m le degré de P. On a nécessairement $m \geqslant 1$ puisque la fonction sinus n'est pas constante. Notons

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0,$$

avec $a_m \neq 0$. Ainsi, puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{a_m x^m} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{a_m x^m} = 0,$$

on a $1 = 0$. Ce qui est absurde.

Solution 5.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ell n(n)/n}$. Pour x rèel supèrieur ou ègal à 1, posons alors $f(x) = \frac{\ell n(x)}{x}$.

► f est dèrivable sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ell n(x)}{x^2}.$$

Sur $[1, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ell n(x)$ et donc f croit sur $[1, e]$ puis dècroit.

► En particulier, pour n entier supèrieur ou ègal à $e = 2.71...$, on a $f(n) \leqslant f(3)$ et donc, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\sqrt[n]{n} = e^{f(n)} \leqslant e^{f(3)} = \sqrt[3]{3} = 1,44\ldots.$$

Comme d'autre part, $\sqrt[1]{1} = 1$ et $\sqrt{2} = 1,41\ldots$, pour tout entier naturel non nul, on a $\sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt[3]{3}$: $\sqrt[3]{3} \approx 1,44\ldots$ est la valeur cherchèe.

Solution 6.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = ae^{-bx} - be^{-ax}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = ab\Big[e^{-ax} - e^{-bx}\Big].$$

Soit $x > 0$. Puisque $0 < a < b$, on a $-ax > -bx$ et par croissance stricte de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(0) = a - b$, ainsi

$$\forall x > 0,\quad f(x) > f(0) = a - b.$$

Solution 7.

Seuls les numéros **1.** et **2.** présentent des formes indéterminées.

1. On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n = e^{\ell n(n) - \sqrt{\ell n(n)}}$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

2. On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n = e^{2\,\ell n(n) - \sqrt{n}}.$$

D'après les croissances comparées :

$$\lim_{n \to +\infty} (2\,\ell n(n) - \sqrt{n}) = -\infty$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Alternative plus courte : poser $x = \sqrt{n}$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{1/n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{e^x} = 0.$$

3. On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}\,\ell n(n)}$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

4. On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n = n(\ell n(n))^{\ell n(n)}$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

Solution 8.

La première assertion est équivalente à

$$a \neq 0 \implies \exists \varepsilon > 0,\ |a| \geqslant \varepsilon.$$

Cette implication est vraie ; en effet il suffit de prendre $\varepsilon = |a|$.

La deuxième assertion est équivalente à

$$a \neq 0 \implies \exists \varepsilon > 0,\ |a| > \varepsilon.$$

Cette implication est vraie ; en effet il suffit de prendre $\varepsilon = |a|/2$.