

Exercice 1.

Soit G un groupe. Notre but est de montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $S(G)$.

1. Pour cela considérons pour tout $g \in G$ l'application *translation à gauche par g*

$$\varphi_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh.$$

Montrer que $\varphi_g \in S(G)$.

2. Montrer que $G \rightarrow S(G), g \mapsto \varphi_g$, est un morphisme injectif. Conclure.

Exercice 2.

Show that the binary operation \odot on \mathbb{Z} defined by

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2 : m \odot n = m + n + mn,$$

is commutative and associative. Is (\mathbb{Z}, \odot) a group?

Exercice 3.

Soit G un groupe ayant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

Exercice 4.

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On pose pour tous éléments (x, y) et (x', y') de G :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G .
2. Vérifier que $(G, *)$ est un groupe. Est-il commutatif?
3. Donner une expression de $(x, y)^{*n}$.

Exercice 5.

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G .

1. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G .
2. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 6.

Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

1. Solutions

Solution 1.

1. Pour tout $g, h \in G$ on a

$$\begin{aligned} (\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g)(h) &= g^{-1}(gh) = (g^{-1}g)h = h, \\ (\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}})(h) &= g(g^{-1}h) = (gg^{-1})h = h. \end{aligned}$$

Cela signifie que l'application φ_g est bijective, $\varphi_{g^{-1}}$ étant son inverse.

Solution 2.

The binary operation commutative and associative since for all $(n, m, k) \in \mathbb{Z}^3$

$$\begin{aligned} m \odot n &= m + n + mn = n + m + nm = n \odot m, \\ k \odot (m \odot n) &= k \odot (m + n + mn) \\ &= k + (m + n + mn) + k(m + n + mn) \\ &= k + m + n + mn + km + kn + kmn \\ &= (k + m + km) + n + (k + m + km)n \\ &= (k \odot m) \odot n. \end{aligned}$$

The element $0 \in \mathbb{Z}$ is a neutral because

Solution 3.

Pour $x \in G$, on note $\langle x \rangle$ le sous-groupe de G engendré par x . Remarquons que $\langle x \rangle$ est d'ordre fini, sinon il serait isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ qui possède un nombre infini de sous-groupes. Comme G possède un nombre fini de sous-groupes, les sous-groupes de la forme $\langle x \rangle$ sont en nombre

Solution 4.

1. Soient (x, y) et (x', y') dans G . Comme $x, x' \in \mathbb{R}^*$, $xx' \in \mathbb{R}^*$ et il est évident que $xy' + y \in \mathbb{R}$. Donc $(x, y) * (x', y') \in G$.

Soient $(x, y), (x', y')$ et (x'', y'') dans G . On voit facilement que :

$$\begin{aligned} ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') &= (x, y) * ((x', y') * (x'', y'')) \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \end{aligned}$$

2. G possède un élément neutre à savoir $(1, 0)$. Soit $(x, y) \in G$ et cherchons $(x', y') \in G$ tel que $(x, y) * (x', y') = (1, 0)$. Ceci équivaut à résoudre

$$\begin{cases} xx' = 1 \\ xy' + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ y' = -\frac{y}{x} \end{cases} \text{ car } x \neq 0$$

Donc (x, y) admet pour inverse à droite $(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x})$. On vérifie facilement que c'est aussi l'inverse à gauche, donc l'inverse.

En conclusion, $(G, *)$ est bien un groupe. On voit qu'il

2. $\forall g, g', h \in G$ on a

$$(\varphi_{gg'})(h) = (gg')h = g(g'h) = (\varphi_g \circ \varphi_{g'})(h),$$

d'où $\varphi_{gg'} = \varphi_g \circ \varphi_{g'}$.

Soit $g \in \text{Ker } \varphi$. Alors $\varphi_g = Id_G$, c'est-à-dire $gh = h$ pour tout $h \in G$. En particulier $g = ge_G = e_G$. Ainsi $\text{Ker } \varphi = \{e_G\}$, c'est-à-dire φ est un morphisme injectif.

$$\forall n \in \mathbb{Z} : 0 \odot n = 0 + n + 0 = n,$$

and there isn't another neutral element. In fact, suppose that $e \in \mathbb{Z}$ is another neutral element, then $0 \odot e = 0$ (because e is neutral) and also $0 \odot e = e$ (because 0 is neutral), thus $0 = e$.

(\mathbb{Z}, \odot) is not a group. If it was a group then 1 would be invertible, i.e., there would exist a $k \in \mathbb{Z}$ such that $1 \odot k = 0$, which is a contradiction because

$$0 = 1 \odot k = 1 + 2k,$$

would imply that 0 is an odd number. ζ

fini : on les notera $\langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle$. Soit $y \in G : \langle y \rangle$ est un des sous-groupes $\langle x_i \rangle$. En particulier, y appartient à l'un des $\langle x_i \rangle$. Ainsi $G = \cup_{i=1}^n \langle x_i \rangle$. Comme les $\langle x_i \rangle$ sont tous d'ordre fini, G est fini.

n'est pas commutatif car $(1, 1) * (2, 2) = (2, 4)$ et $(2, 2) * (1, 1) = (2, 3)$.

3. A partir des premières valeurs de n , on conjecture $(x, y)^{*n} = (x^n, y + yx + \dots + yx^{n-1})$.

Initialisation : La formule est clairement vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose $(x, y)^{*n} = (x^n, y + yx + \dots + yx^{n-1})$ pour un certain n . Alors

$$\begin{aligned} (x, y)^{*(n+1)} &= (x, y) * (x, y)^{*n} \\ &= (x, y) * (x^n, y + yx + \dots + yx^{n-1}) \\ &= (x^{n+1}, y + yx + \dots + yx^n) \end{aligned}$$

On conclut par récurrence.

En outre, en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$(x, y)^{*n} = \begin{cases} (x^n, \frac{1-x^n}{1-x}) & \text{si } x \neq 1 \\ (x, ny) & \text{sinon} \end{cases}$$

Solution 5.

1. Notons e l'élément neutre de G . Comme H et K sont des sous-groupes de G , ils contiennent tous deux l'élément neutre e . Donc $e \in H \cap K$.

Soit $h, k \in H \cap K$. Comme H est un sous-groupe de G , $h^{-1}k \in H$. De même, $h^{-1}k \in K$. Par conséquent, $h^{-1}k \in H \cap K$. En conclusion, $H \cap K$ est un sous-groupe de G .

2. Si $H \subset K$ ou $K \subset H$, on a $H \cup K = K$ ou $H \cup K = H$. Donc $H \cup K$ est bien un sous-groupe de G .

Solution 6.

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrons que $f(r) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$f(r) = f\left(n \frac{r}{n}\right) = nf\left(\frac{r}{n}\right)$$

Réciproquement, supposons que $H \cup K$ est un sous-groupe de G . Supposons de plus que $H \not\subset K$ et montrons que $K \subset H$. Comme $H \not\subset K$, il existe $h_0 \in H \setminus K$. Soit maintenant $k \in K$. Comme $h_0, k \in H \cup K$ et que $H \cup K$ est un sous-groupe de G , $h_0k \in H \cup K$.

On ne peut avoir $h_0k \in K$ car sinon $h_0 = (h_0k)k^{-1} \in K$, ce qui n'est pas. Donc $h_0k \in H$. Or $k = h_0^{-1}(h_0k) \in H$. Ceci étant vrai pour tout élément k de K , on a donc $K \subset H$.

Or $f(r)$, n et $f\left(\frac{r}{n}\right)$ sont des entiers. Donc $f(r)$ est divisible par n .

Ainsi $f(r)$ est divisible par tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a forcément $f(r) = 0$. En conclusion, le seul morphisme de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$ est le morphisme nul.