

Exercice 1.

Let $a_1, \dots, a_n > 0$. Show that $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$.

Exercice 2.

Sei I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine ableitbare, streng konvexe Funktion und $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt. Wieviele Tangenten der Kurve von f können durch diesen Punkt gehen ?

Exercice 3.

L'exercice a pour objectif de (re-)démontrer et d'appliquer l'inégalité arithmético-géométrique.

1. Montrer l'inégalité arithmético-géométrique, pour tout

$$n \geq 2, \quad x_1, \dots, x_n > 0,$$

on a :

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

2. En déduire que $\forall a, b, c > 0$,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

3. Prouver que $\forall a, b, c > 0$,

$$(a + b + c)^3 \geq 27abc.$$

4. Soit $n \geq 1$. Etablir que

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}.$$

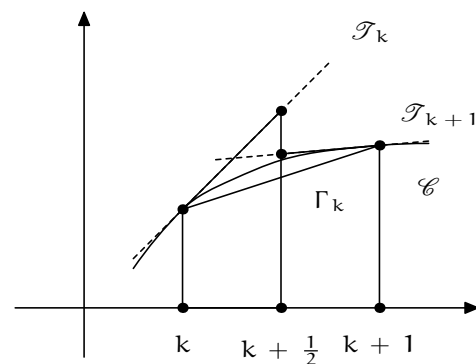
Exercice 4.

Que pensez vous des assertions suivantes ?

1. La somme de fonctions convexes est convexe.
2. La composée de fonctions convexes est convexe.
3. Le produit de deux fonctions convexes positives est convexe.
4. Le quotient de deux fonctions convexes strictement positives est convexe.

Exercice 5.

On note \mathcal{C} la courbe représentative du logarithme népérien sur $]0, +\infty[$, et pour tout entier naturel k non nul, Γ_k la corde de \mathcal{C} interceptant les points d'abscisses k et $k+1$. On note de plus \mathcal{T}_k et \mathcal{T}_{k+1} les tangentes à \mathcal{C} aux points d'abscisses k et $k+1$.



En cherchant une inspiration dans la figure esquissée ci-dessus, prouver que pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{2} [\ln(k+1) + \ln(k)] \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt$$

et

$$\int_k^{k+1} \ln(t) dt \leq \frac{1}{2} [\ln(k+1) + \ln(k)] + \frac{1}{8k(k+1)}.$$

1. Solutions

Solution 1.

We give two different proofs.

► Induction on n . The proposition is evident for $n = 1$. Suppose now that the proposition is true for any n positiv real numbers. Let $a_1, \dots, a_{n+1} > 0$. We have to prove that

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} \geq n + 1.$$

Since this inequality is invariant under circular permutations of indices $k \mapsto k + 1$, we can suppose that a_{n+1} is the smallest among the numbers a_1, \dots, a_{n+1} . Then

$$(a_1 - a_{n+1})(a_n - a_{n+1}) \geq 0$$

hence

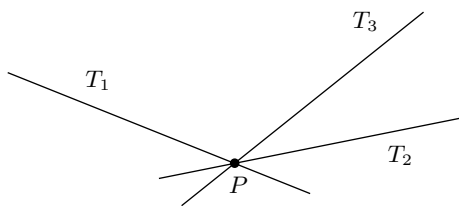
$$a_1 a_n + a_{n+1}^2 \geq a_n a_{n+1} + a_1 a_{n+1}.$$

Dividing by $a_1 a_{n+1}$ we get

Solution 2.

Höchstens zwei Tangenten können P enthalten.

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe drei verschiedene Tangenten T_1, T_2, T_3 , die den Punkt $P = (x_0, y_0)$ enthalten. Indem man gegebenenfalls zur Funktion $x \mapsto f(x + x_0) - y_0$ übergeht, dürfen wir annehmen, dass $P = (0, 0)$.



Es gibt also drei verschiedene reelle Zahlen a_1, a_2, a_3 , so dass

$$T_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a_k x\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $a_1 < a_2 < a_3$. Da die Kurve von f oberhalb jeder ihrer Tangenten liegt,

Solution 3.

1. La fonction logarithme népérien est concave sur \mathbb{R}_+^* . L'inégalité de concavité s'écrit pour tout entier $n \geq 2$ et tous réels x_1, \dots, x_n strictement positifs ,

$$\ln \left(\frac{x_1 \dots + x_n}{n} \right) \geq \frac{\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)}{n},$$

i.e.

$$\ln \left(\frac{x_1 \dots + x_n}{n} \right) \geq \ln \left(\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \right),$$

d'où le résultat par croissance de la fonction exponentielle.

2. D'après l'inégalité arithmético-géométrique ,

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} = abc,$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} \geq \frac{a_n}{a_1} + 1.$$

On the other hand by induction hypothesis we have

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n,$$

and therefore

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n+1}}{a_1} \geq \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_1} + 1 \geq n + 1.$$

► The geometric mean is less or equal the arithmetic mean :

$$\frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2} \times \frac{a_2}{a_3} \times \dots \times \frac{a_n}{a_1}} = 1.$$

Multiplying by n yields the desired inequality.

gilt

$$\forall x \leq 0 : f(x) \geq a_1 x, \quad \forall x \geq 0 : f(x) \geq a_3 x,$$

oder anders ausgedrückt,

$$\forall x < 0 : \frac{f(x)}{x} \leq a_1, \quad \forall x > 0 : \frac{f(x)}{x} \geq a_3.$$

Daraus folgt, dass der einzig mögliche Kontaktpunkt der Tangente T_3 mit der Kurve von f der Punkt P ist. Also ist $f'(0) = 0$. Es folgt

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} \leq a_1,$$

und

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \geq a_3,$$

also der Widerspruch $a_1 \geq a_3$. ζ

d'où le résultat en multipliant par trois.

3. D'après l'inégalité arithmético-géométrique ,

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} > 0,$$

soit en élevant au cube ,

$$\frac{1}{27}(a + b + c)^3 \geq abc,$$

d'où le résultat en multipliant par 27.

4. D'après l'inégalité arithmético-géométrique ,

$$\frac{n + 1}{2} = \frac{n(n + 1)}{2n} = \frac{1 + \dots + n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \dots n} = \sqrt[n]{n!}.$$

Solution 4.

1. Vrai. La preuve consiste simplement en additionnant les inégalités exprimant la convexité de chaque fonction.

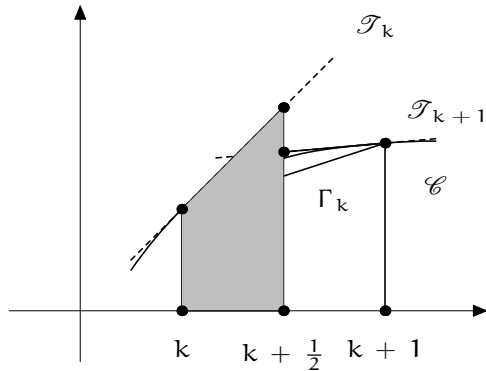
2. Faux. Par exemple $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*, x \mapsto 1/x$, et $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*, x \mapsto 1/\sqrt{x}$, sont convexes mais leur composée est la fonction racine carré qui n'est pas convexe.

En revanche, si l'on exige de la deuxième fonction convexe d'être croissante, la composée est convexe. En effet soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, telles que g est croissante et telles que $f(I) \subset J$. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$. A cause de la convexité de f on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Solution 5.

Le logarithme népérien étant concave sur son ensemble de définition, \mathcal{C} est en-dessous de ses tangentes \mathcal{T}_k et \mathcal{T}_{k+1} . On en déduit que l'aire sous la courbe \mathcal{C} sur l'intervalle $[k, k + 1/2]$ est majorée par l'aire du trapèze indiqué ci-dessous :



Puisque l'équation de \mathcal{T}_k est

$$y = \frac{x - k}{k} + \ln(k),$$

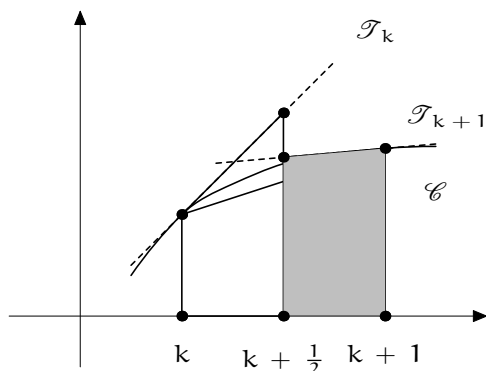
l'aire du trapèze vaut

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left[\ln(k) + \frac{1}{2k} + \ln(k) \right]$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{2} \ln(k) + \frac{1}{8k}.$$

De même, l'aire sous la courbe \mathcal{C} sur l'intervalle $[k + 1/2, k + 1]$ est majorée par l'aire du trapèze indiqué ci-dessous,



Ensuite, en utilisant d'abord la croissance de g puis sa convexité, on a

$$\begin{aligned} g(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) &\leq g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \\ &\leq \lambda g(f(x)) + (1 - \lambda)g(f(y)), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $g \circ f$ est convexe.

3. Faux. Par exemple considérer sur $]0, \infty[$ les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1/\sqrt{x}$.

4. Faux. Par exemple considérer sur $]0, \infty[$ les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x\sqrt{x}$.

Puisque l'équation de \mathcal{T}_{k+1} est

$$y = \frac{x - k - 1}{k + 1} + \ln(k + 1),$$

l'aire du trapèze vaut

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left[\ln(k + 1) - \frac{1}{2k + 2} + \ln(k + 1) \right]$$

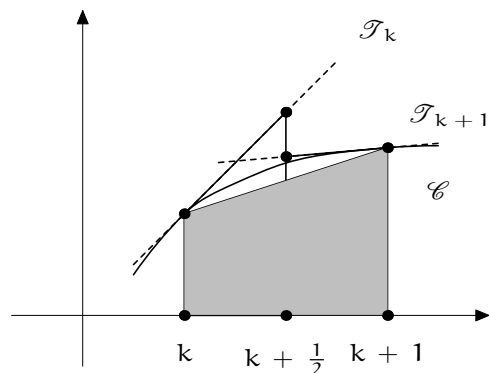
c'est-à-dire,

$$\frac{1}{2} \ln(k + 1) - \frac{1}{8(k + 1)}.$$

On a donc,

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \ln(t) dt &\leq \frac{1}{2} \left[\ln(k + 1) + \ln(k) \right] + \frac{1}{8k(k + 1)}. \end{aligned}$$

La courbe \mathcal{C} étant au-dessus de sa corde Γ_k , l'aire sous la courbe \mathcal{C} sur l'intervalle $[k, k + 1]$ est minorée par l'aire du trapèze indiqué ci-dessous,



ainsi,

$$\frac{1}{2} \left[\ln(k + 1) + \ln(k) \right] \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt.$$