

**Exercice 1.**

Prouver que, pour tout  $x \geq 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

**Exercice 2.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On considère la suite définie par

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 2f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{-1}{n}\right).$$

1. Montrer que cette suite converge et préciser sa limite.
2. On suppose  $f$  dérivable en 0. Que peut-on dire de plus sur  $u_n$  ?
3. On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  avec  $f'(0) = 0$ . Que dire de  $u_n$  ? On suppose de plus que  $f''(0) \neq 0$ . Déterminer un équivalent de  $u_n$ .

**Exercice 3.**

Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \sin\left(\frac{6}{n}\right) - 6 \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Exercice 4.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ . On suppose de plus que :

$$\exists \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}| \leq \lambda^n n!$$

Montrer que  $f$  est nulle sur  $]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}[$  puis sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5.**

Déterminer des équivalents simples en 0 des expressions suivantes,

- |                             |                              |
|-----------------------------|------------------------------|
| 1. $\arccos(x) - \pi/2$ ;   | 4. $\arctan(x) + x$ ;        |
| 2. $x^4 + x + x^2$ ;        | 5. $\frac{1}{1-x} - 1 + x$ ; |
| 3. $\arcsin(x) + x + x^2$ ; | 6. $\frac{x^2}{1+x} - x$ .   |

**Exercice 6.**

*Autour du cosinus.*

1. Calculer le développement limité à l'ordre 7 au voisinage de 0 de  $\ln(\cos(x))$ .
2. En déduire le développement limité à l'ordre 6 de  $\tan(x)$  au voisinage de 0.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 10 au voisinage de 0 de  $(\ln(\cos(x)))^3$ .

**Exercice 7.**

Déterminer le  $DL_5(0)$  de

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Exercice 8.**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur l'intervalle  $I = ]-1, 1[$  par

$$f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de  $f(x)$  au voisinage de 0.
2. Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  qu'on explicitera.
3. En admettant qu'il existe, déterminer le développement limité à l'ordre 3 de  $f^{-1}(x)$  au voisinage de 0.

**Exercice 9.**

Calculer le développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de 0 des expressions suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $e^{\sin}$ et $n = 3$ ;              | 9. $\frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}}$ et $n = 3$ ;     |
| 2. $e^{\cos}$ et $n = 4$ ;              | 10. $\frac{\cos(x)}{1+x^2}$ et $n = 5$ ;         |
| 3. $(1 + \sin)^{\cos}$ , $n = 3$ ;      | 11. $\frac{1 - \cos}{1 + \sin}$ et $n = 3$ ;     |
| 4. $\ln(3e^x - e^{-x})$ et $n = 3$ ;    | 12. $\tan(\sin) - \sin(\tan)$ , pour $n = 7$ ;   |
| 5. $\ln(1 + \cos)$ et $n = 3$ ;         | 13. $\frac{e^{-x}}{1+x}$ et $n \in \mathbb{N}$ . |
| 6. $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$ et $n = 3$ ; |  |
| 7. $\sqrt{1 + \ln(1+x)}$ , $n = 3$ ;    |  |
| 8. $\frac{\arctan}{\sin}$ et $n = 4$ ;  |  |

### 1. Solutions

**Solution 1.**

Puisque  $\forall k \geq 0$ , la dérivée  $n$ -ième de l'exponentielle en 0 vaut 1, la formule de Taylor-Lagrange s'écrit à l'ordre  $n$  pour  $x \geq 0$  : il existe  $c \in ]0, x[$  tel que

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}e^c}{(n+1)!} \geq 0.$$

**Solution 2.**

1. Puisque  $f$  est continue en 0, d'après le critère séquentiel, les suites de termes généraux

$$f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{2}{n}\right) \text{ et } f\left(-\frac{1}{n}\right)$$

converge vers  $f(0)$ , on a donc que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers

$$f(0) - 2f(0) + f(0) = 0.$$

2. Si  $f$  est dérivable en 0, alors au voisinage de 0,

$$f(u) = f(0) + uf'(0) + o(u),$$

ainsi

$$u_n = -\frac{4}{n}f'(0) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En particulier, si  $f'(0) \neq 0$ ,

$$u_n \sim -\frac{4f'(0)}{n}.$$

Si  $f'(0) = 0$ , le seul renseignement sur  $u_n$  est que

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. D'après la formule de Taylor-Young,

$$f(u) = f(0) + \frac{u^2}{2}f''(0) + o(u^2),$$

ainsi

$$u_n = -\frac{3}{n^2}f''(0) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La seule que l'on puisse affirmer en général est que

$$u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si de plus  $f''(0) \neq 0$ , on a plus précisément,

$$u_n \sim -\frac{3f''(0)}{n^2}.$$

**Solution 3.**

L'application de la formule de Taylor-young à l'ordre trois en 0 pour la fonction sinus aboutit à ,

$$u_n \sim -\frac{35}{n^2}.$$

**Solution 4.**

Soit  $x \in ]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}[$ . L'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et  $x$  au rang  $n$  donne :

$$|f(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{[0;x]} |f^{(n)}| \leq |\lambda x|^n < 1.$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient  $f(x) = 0$ .

Montrons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$  que  $f$  est nulle sur  $]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}[$ . On a vu que c'était vrai pour  $k = 1$ . Supposons-le vrai pour un  $k \in \mathbb{N}^*$ . Considérons les fonctions :

$$g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f\left(x - \frac{k}{\lambda}\right) \quad \quad x \mapsto f\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)$$

Comme  $f$  est nulle sur  $]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}[$  par hypothèse de récurrence et que les  $f^{(n)}$  sont continues, on a donc :

$$f^{(n)}\left(-\frac{k}{\lambda}\right) = f^{(n)}\left(\frac{k}{\lambda}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire

$$g_1^{(n)}(0) = g_2^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus  $\sup_{\mathbb{R}} |g_1^{(n)}| = \sup_{\mathbb{R}} |g_2^{(n)}| = \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}|$ . Donc  $g_1$  et  $g_2$  vérifient les mêmes hypothèses que  $f$  : elles sont donc nulles sur  $]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}[$ . Par conséquent,  $f$  est nulle sur  $]-\frac{k+1}{\lambda}; \frac{k+1}{\lambda}[$ .

Par récurrence,  $f$  est donc nulle sur tout intervalle  $]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}[$  où  $k \in \mathbb{N}^*$  : elle est donc nulle sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution 5.**

1. On a au voisinage de 0,

$$\arccos(x) - \frac{\pi}{2} = -\arcsin(x) \underset{0}{\sim} -x.$$

2. On a au voisinage de 0,

$$x^4 + x + x^2 \underset{0}{\sim} x.$$

3. On a au voisinage de 0,

$$\arcsin(x) + x + x^2 = x + x + o(x) \underset{0}{\sim} 2x.$$

4. On a au voisinage de 0,

$$\arctan(x) + x = x + x + o(x) \underset{0}{\sim} 2x.$$

**Solution 6.**

1. On considère l'infiniment petit

$$u = \cos(x) - 1 = \mathcal{O}(x^2)$$

pour retrouver la forme connue  $\log(1 + u)$ . Pour calculer  $\ln(\cos(x))$  avec la précision  $o(x^7)$ , il suffit de développer  $\ln(1 + u)$  à l'ordre 4 :

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4).$$

Le premier terme de ce développement impose de calculer  $u$  avec la précision  $o(x^7)$  :

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^8}{320} + o(x^9) \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^7), \\ u^3 &= -\frac{x^6}{8} + \frac{x^8}{32} - \frac{7x^{10}}{1920} + o(x^{11}) \\ &= -\frac{x^6}{8} + o(x^7), \\ u^4 &= o(x^7). \end{aligned}$$

**Solution 7.**

On a

$$\arcsin(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^5).$$

5. On a pour  $x \neq 1$ ,

$$\frac{1}{1-x} - 1 + x = \frac{2x - x^2}{1-x},$$

ainsi au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1-x} - 1 + x \underset{0}{\sim} \frac{2x}{1} = 2x.$$

6. On a

$$\frac{x^2}{1+x} \underset{0}{=} o(x),$$

ainsi

$$\frac{x^2}{1+x} - x = -x + o(x) \underset{0}{\sim} -x.$$

Finalement, il suffit d'aller à l'ordre 3 pour trouver

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7).$$

2. Au voisinage de 0, la fonction  $\tan$  est indéfiniment dérivable et admet pour primitive la fonction

$$x \mapsto -\ln(\cos(x)).$$

En dérivant terme à terme le développement limité de cette primitive, on trouve

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

**REMARQUE** – On notera que cette méthode n'est pas la meilleure...

3. Voir plus haut.

D'après le théorème sur les produits de DL, on a donc

$$f(x) \underset{0}{=} x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + o(x^5).$$

**Solution 8.**

1.

$$x + \log(1+x) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $I$  (comme somme de fonctions continues et strictement croissantes). D'après le théorème d'inversion, la fonction  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle

$$J = ]f(-1^+), f(1^-)[ = ]-\infty, 1 + \log 2[.$$

3. Admettons que

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$$

pour des réels  $a_k$  convenables. Comme  $f(0) = 0$ , alors  $f^{-1}(0) = 0$  et, par continuité de  $f^{-1}$ , on sait déjà que  $a_0 = 0$ .

Comme  $f^{-1}(x)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0, on peut prendre

$$u = f^{-1}(x) = \mathcal{O}(x)$$

dans le développement limité

$$f(u) = 2u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

**Solution 9.**

1. Comme  $\sin$  tend vers 0 au voisinage de 0, il faut connaître le développement de  $e^u$  pour  $u$  voisin de 0. Comme la valuation de  $\sin$  est égale à 1, en posant  $u = \sin(x)$ , on aura

$$o(u^n) = o(x^n)$$

et il faut donc pousser le développement de  $e^u$  à l'ordre 3 en  $u$  :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3).$$

La présence du terme  $u = \sin(x)$  impose de pousser le développement de  $\sin(x)$  à l'ordre 3 en  $x$  :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

On en déduit facilement les développements limités à l'ordre 3 de  $\sin^2(x)$  et de  $\sin^3(x)$  :

$$\sin^2(x) = x^2 + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin^3(x) = x^3 + o(x^3).$$

Finalement,

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

2. Il faut cette fois connaître le développement limité de  $\exp$  au voisinage de  $\cos 0 = 1$  :

$$e^{1+u} = e(1 + u + \dots + o(u^n))$$

et on va poser  $u = \cos x - 1$ . Comme  $u = \mathcal{O}(x^2)$ , on a  $o(u^n) = o(x^{2n})$  et il suffit donc de prendre  $n = 2$  pour trouver le développement limité à l'ordre 4 de  $e^{\cos x}$ . Le terme en  $u$  dans le développement limité de  $e^{1+u}$

Or

$$u^2 = a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + o(x^3)$$

$$u^3 = a_1^3x^3 + o(x^3)$$

donc

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= 2a_1x + \frac{(4a_2 - a_1^2)}{2}x^2 \\ &\quad + \frac{(6a_3 - 3a_1a_2 + a_1^3)}{3}x^3 \\ &\quad + o(x^3) \\ &= x \quad (\forall x \in J) \\ &= x + o(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{cases} 2a_1 &= 1 \\ -a_1^2 + 4a_2 &= 0 \\ a_1^3 - 3a_1a_2 + 6a_3 &= 0 \end{cases}$$

donc

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{16}, \quad a_3 = \frac{-1}{192}.$$

impose de pousser le développement limité à l'ordre 4 de  $\cos x - 1$  :

$$u = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

Par suite,  $u^2 = x^4/4 + o(x^4)$  et finalement,

$$e^{\cos(x)} = e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + o(x^4).$$

3. On se ramène à des formes connues :

$$(1 + \sin(x))^{\cos(x)} = e^{\cos(x) \cdot \ln(1 + \sin(x))}.$$

L'argument de l'exponentielle est  $\mathcal{O}(x)$ , donc il faut pousser le développement limité d' $\exp$  à l'ordre 3 et calculer le développement limité à l'ordre 3 de cet argument :

$$\ln(1 + \sin(x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

donc, par produit,

$$\cos(x) \cdot \ln(1 + \sin(x)) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Il reste à calculer les développements limités à l'ordre 3 du carré

$$(\cos(x) \cdot \ln(1 + \sin(x)))^2 = x^2 - x^3 + o(x^3),$$

et du cube de cette expression

$$(\cos(x) \cdot \ln(1 + \sin(x)))^3 = x^3 + o(x^3),$$

pour conclure :

$$(1 + \sin(x))^{\cos(x)} = 1 + x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

4. Lorsque  $x$  tend vers 0, l'argument du logarithme tend vers 2. On pose donc

$$u = 3e^x - e^{-x} - 2 = \mathcal{O}(x).$$

Il faut donc pousser à l'ordre 3 le développement de  $\log(2 + u)$  pour trouver un résultat avec la précision  $o(x^3)$ . Or

$$\ln(2 + u) = \log 2 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{24} + o(u^3),$$

donc il faut d'abord calculer le développement limité de  $u$  avec la précision  $o(x^3)$  :

$$u = 4x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

On en déduit que  $u^2 = 16x^2 + 8x^3 + o(x^3)$ , puis que  $u^3 = 64x^3 + o(x^3)$ . Finalement,

$$\ln(3e^x - e^{-x}) = \ln(2) + 2x - \frac{3x^2}{2} + 2x^3 + o(x^3).$$

5. L'infiniment petit à introduire ici est

$$u = (1 + \cos(x)) - 2 = \mathcal{O}(x^2).$$

Il suffit alors de connaître le développement limité à l'ordre 2 de  $\ln(2 + u)$  (l'ordre 1 n'est peut-être pas suffisant) :

$$\ln(2 + u) = \ln(2) + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$$

et le développement limité de  $u$  avec la précision  $o(x^3)$  :

$$u = -\frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \text{d'où} \quad u^2 = o(x^3).$$

Il suffit en fait de connaître le développement limité à l'ordre 1 de  $\log(1 + u)$ ... et on trouve que

$$\ln(1 + \cos(x)) = \ln(2) - \frac{x^2}{4} + o(x^3).$$

6. Lorsque  $x$  tend vers 0,  $\sqrt{1+x}$  tend vers 1, donc on considère l'infiniment petit

$$u = \sqrt{1+x} - 1 = \mathcal{O}(x)$$

et il faut connaître le développement limité de  $\sqrt{2+u}$  à l'ordre 3 en  $u$  pour trouver un développement avec la précision  $o(x^3)$  :

$$\sqrt{2+u} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}u}{4} - \frac{\sqrt{2}u^2}{32} + \frac{\sqrt{2}u^3}{128} + o(u^3).$$

Il reste à calculer le développement de  $u$  avec la précision  $o(x^3)$  pour conclure :

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3), \\ u^2 &= \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{16} + o(x^3), \\ u^3 &= \frac{x^3}{8} + o(x^3), \end{aligned}$$

d'où enfin :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1+x}} = \sqrt{2} \left( 1 + \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{128} + \frac{21x^3}{1024} + o(x^3) \right).$$

7. On considère l'infiniment petit

$$u = \ln(1+x) = \mathcal{O}(x).$$

Il suffit de connaître le développement limité à l'ordre 3 de

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3).$$

D'autre part, on sait que

$$u = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc  $u^2 = x^2 - x^3 + o(x^3)$  et  $u^3 = x^3 + o(x^3)$ . Finalement,

$$\sqrt{1 + \ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} + \frac{17x^3}{48} + o(x^3).$$

8. On sait que

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

et que

$$\sin(x) = x \left( 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right).$$

On retrouve ainsi une forme connue :

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-u}$$

avec l'infiniment petit

$$u = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = \mathcal{O}(x^2).$$

Il suffit du développement de  $1/\sin(x)$  à l'ordre 3 pour conclure (puisque la valuation d' $\arctan$  est égale à 1). Par conséquent, nous allons partir du développement de  $1/(1-u)$  avec la précision  $o(u^2) = o(x^4)$  :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2).$$

Or

$$u^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4),$$

donc

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + o(x^3).$$

On en déduit que

$$\frac{\arctan(x)}{\sin(x)} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{59x^4}{360} + o(x^4).$$

9. C'est simplement le produit de deux développements limités connus !

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2),$$

d'où

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{24} + o(x^3).$$

10. Encore un produit de développements connus! La valuation de chaque facteur est égale à 0, il faut donc pousser les deux développements à l'ordre 5. On trouve ainsi

$$\frac{\cos(x)}{1+x^2} = 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{37x^4}{24} + o(x^5).$$

11. On retrouve la forme connue  $1/(1+u)$  avec l'infiniment petit

$$u = \sin(x) = \mathcal{O}(x).$$

Or la valuation du numérateur est égale à 2! Il suffit donc de connaître le développement du dénominateur avec la précision  $o(x)$  et pour cela, de savoir que

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u) = 1 - x + o(x).$$

On trouve ainsi

$$\frac{1 - \cos(x)}{1 + \sin(x)} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

12. C'est une horreur... Il faut connaître les développements limités à l'ordre 7 de sin :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

et de tan :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7).$$

On en déduit que :

$$\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x)) = \frac{x^7}{30} + o(x^7).$$

**REMARQUE** – Il vaut mieux attendre le tout dernier moment pour réduire les divers coefficients au même dénominateur...

13. En supposant que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

et que (attention au changement d'indice!)

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_{n-k} x^{n-k} + o(x^n),$$

on vérifie sans peine que le coefficient du terme de degré  $n$  dans le développement du produit  $f(x)g(x)$  est égal à

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Par conséquent, le coefficient du terme de degré  $n$  dans le développement de  $e^{-x}/(1+x)$  est égal à

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$