

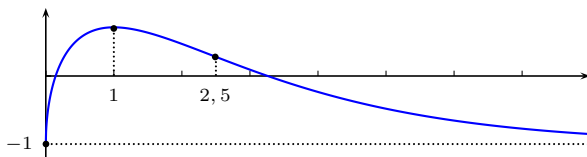
Exercice 1.

Soit P un polynôme réel non-constant dont les racines sont réelles et simples.

1. Montrer que les racines de P' sont aussi réelles et simples.
2. En déduire que pour tout $\alpha > 0$ les racines de $P^2 + \alpha$ sont simples.

Exercice 2.

Voici la courbe d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. L'axe des ordonnées est une tangente verticale. Sont indiqués un maximum, un point d'inflexion et une asymptote.



1. Tracer l'allure de f' et celle de f'' .
2. Tracer l'allure des fonctions définies par

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + 1, & h(x) &= f(x + 1), \\ u(x) &= 2f(x), & v(x) &= f(2x). \end{aligned}$$

Exercice 3.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^*$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right).$$

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe des réels $0 < x_1 < \dots < x_n < 1$ tels que

$$\sum_{k=1}^n f'(x_k) = n.$$

Exercice 5.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Prouver que f est lipschitzienne.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable mais n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 7.

Soit f de $[0, 2]$ dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^3 telle que

$$f(0) = f(1) = f(2) = 0.$$

Montrer que $\forall x \in [0, 2], \exists c \in [0, 2]$ tel que

$$f(x) = \frac{1}{6} f^{(3)}(c) x(x-1)(x-2).$$

Exercice 8.

Soit f , une fonction à valeurs réelles, deux fois dérivable et bornée sur \mathbb{R} .

1. Démontrer que sa dérivée seconde s'annule.
2. Le signe de la dérivée seconde peut-il être constant ?

1. Solutions

Solution 1.

1. Soit n le degré de P et $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ les racines de P . Pour tout $k = 1, \dots, n - 1$ il existe, d'après le théorème de Rolle, un $b_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $P'(b_k) = 0$. Ainsi b_1, \dots, b_{n-1} sont $n - 1$ racines distinctes de P' et pour une raison de degré elles sont toutes simples.

2. Soit $\alpha > 0$ et $c \in \mathbb{C}$ une racine du polynôme $Q = P^2 + \alpha$. Il faut montrer que $Q'(c) \neq 0$. On a certainement

$c \notin \mathbb{R}$ car

$$Q(x) = P(x)^2 + \alpha > 0$$

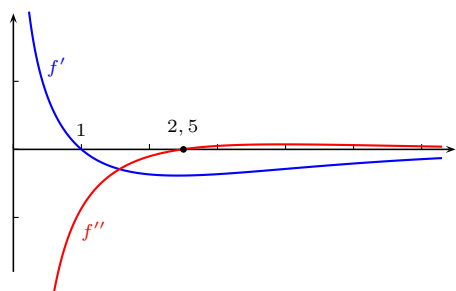
pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier P et P' ne s'annulent pas en c . Ainsi

$$Q'(c) = 2P(c)P'(c) \neq 0,$$

ce qui montre que la racine c de Q est simple.

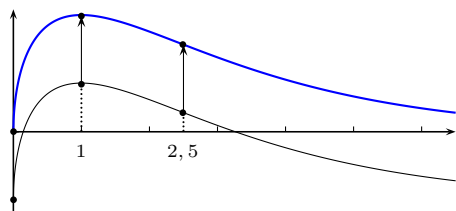
Solution 2.

1. Dérivée et dérivée seconde :

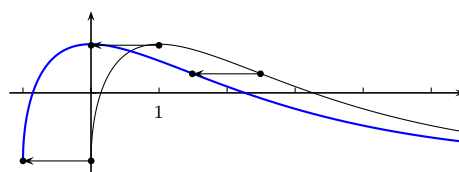


2.

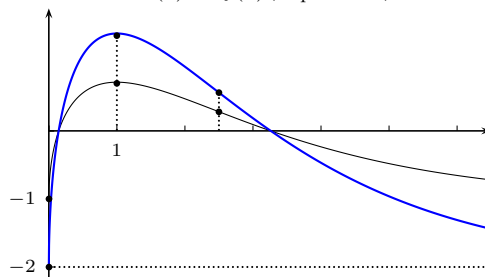
$g(x) = f(x) + 1$ (translation verticale)



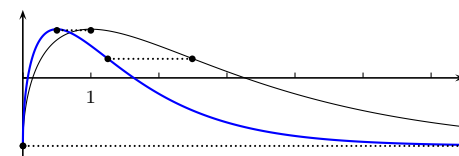
$h(x) = f(x + 1)$ (translation horizontale)



$u(x) = 2f(x)$ (amplification)



$v(x) = f(2x)$ (variation accélérée)



Solution 3.

Sous un habit bien impressionnant se cache un énoncé presque trivial. En effet, il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction définie par

$$g(x) = \ln |f(x)|.$$

Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a},$$

ou encore

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{\ln |f(b)| - \ln |f(a)|}{b - a} = \frac{\ln \left| \frac{f(b)}{f(a)} \right|}{b - a}.$$

Remarquons que dans la dernière expression on peut ôter les valeurs absolues car $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe ; en effet, s'ils étaient de signes opposés alors par le théorème des valeurs intermédiaires il y aurait un antécédent pour 0 contrairement à la définition de f . Ainsi

$$(b - a) \frac{f'(c)}{f(c)} = \ln \frac{f(b)}{f(a)}.$$

Pour conclure il suffit de prendre l'exponentielle des deux côtés de l'égalité.

Solution 4.

Pour $n = 1$ il s'agit précisément du théorème des accroissements finis. Dans le cas général nous considérons la subdivision $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$ de l'intervalle $[0, 1]$. Alors on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \exists x_k \in \left] \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right[\quad : \quad f'(x_k) = n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right).$$

On obtient ainsi une "somme télescope" :

$$\sum_{k=1}^n f'(x_k) = n \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) = n(f(1) - f(0)) = n.$$

Solution 5.

Puisque f' est continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée : il existe $k \geq 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \leq k.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc , $\forall x, y \in [a, b]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

La fonction f est donc lipschitzienne sur le segment $[a, b]$.

Solution 6.

En dehors de l'origine, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 car composée de fonctions de classe \mathcal{C}^1 ; en 0, elle est dérivable, de dérivée nulle, puisque son taux d'accroissement est $x \sin \frac{1}{x}$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0. Cependant, elle n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , puisque sa dérivée,

donnée sur \mathbb{R}^* par

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

ne tend pas vers $f'(0) = 0$ (en fait, elle n'a pas de limite).

Solution 7.

Le résultat est banal lorsque x vaut 0, 1 ou 2. Dans le cas contraire, posons

$$A = \frac{f(x)}{x(x-1)(x-2)}.$$

Notons φ la fonction définie sur $[0, 2]$ par

$$t \mapsto \varphi(t) = f(t) - At(t-1)(t-2).$$

Cette fonction est de classe \mathcal{C}^3 . Puisque φ s'annule en quatre points distincts 0, 1, 2 et x , en appliquant trois fois le lemme de Rolle, φ' s'annule en trois points distincts.

En appliquant à nouveau le lemme de Rolle, φ'' s'annule deux fois sur $[0, 2]$. Et finalement, en appliquant encore une fois le lemme de Rolle, $\varphi^{(3)}$ s'annule en $c \in]0, 2[$. Puisque, $\forall t \in [0, 2]$,

$$\varphi^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - 6A,$$

on obtient

$$A = \frac{f(x)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{6} f^{(3)}(c),$$

et c'est fini !

Solution 8.

1. La dérivée f' est dérivable sur \mathbb{R} . D'après le théorème de Rolle, il suffit qu'elle prenne la même valeur en deux points distincts pour que la dérivée seconde s'annule entre ces deux points. Raisonnons par l'absurde et supposons que f' soit injective sur \mathbb{R} . Il existe au plus un réel x tel que $f'(x) = 0$: considérons un réel x_0 tel que $f'(x_0) > 0$ (un raisonnement analogue serait valable en supposant $f'(x_0) < 0$). Comme f' est continue et injective sur \mathbb{R} , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle reste strictement supérieure à $f'(x_0)$ sur l'un des deux intervalles $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$.

► Si $f'(x) > f'(x_0)$ pour $x > x_0$, alors

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

pour tout $x > x_0$, ce qui montre que f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$: c'est impossible.

► Si $f'(x) > f'(x_0)$ pour $x < x_0$, alors

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

pour tout $x < x_0$, ce qui montre que f tend vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$: c'est également impossible.

REMARQUE – Une fonction à valeurs réelles, continue et injective sur un intervalle est strictement monotone sur cet intervalle. Par conséquent, si la dérivée seconde ne s'annule pas, elle est de signe constant...

2. Éliminons le cas idiot où la fonction f est constante et supposons que sa dérivée prenne une valeur non nulle (par exemple, strictement positive) en un point x_0 . La discussion précédente peut être reprise (le premier cas valant

pour f'' positive, le second cas valant pour f'' négative), quitte à remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges, et aboutit à la contradiction cherchée.