Exercice 1.

Man finde Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ und eine stetige Bijektion $f : A \to B$, so dass f^{-1} nicht stetig ist.

Exercice 2.

Une source intarisable de contre-exemples....

1. Prouver que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0$,

$$f : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

n'est pas continue en 0.

2. Prouver que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0) = 0$ et $\forall x \neq 0$,

$$g : x \longmapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. Show that for all $x, y \geqslant 0$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

2. Deduce that the function $[0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ is uniformly continuous.

Exercice 4.

Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leqslant a|x| + b.$$

Exercice 5.

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue ayant une limite finie ℓ en $+\infty$. Prouver que f est bornée.

Exercice 6.

Soit f, une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x) - f(0)$.

1. Etablir que f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $(g(x))^2$ pour tout réel x et en calculant $(g(x) - g(y))^2$, démontrer que $g(x)g(y) = xy$ pour tous réels x et y.

3. En déduire l'expression de f.

Exercice 7.

Un marcheur parcourt continuement 12 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 6 km.

Exercice 8.

Existe-t-il f, application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}\,?$$

1. Solutions

Solution 1.

Es sei

$$f\ :\ [0,1]\cup]2,3]\ \longrightarrow\ [0,2]\,,\ x\longmapsto\begin{cases}x & \text{wenn } 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1 & \text{wenn } 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

Es klar, dass f eine stetige und bijektive Abbildung ist. Aber die Umkehrabbildung ist nicht stetig, denn

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1} f^{-1}(x)=2\neq 1=f^{-1}(1).$$

Solution 2.

1. Puisque $\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 mais que

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)=1\neq 0=f(0),$$

la fonction f n'est pas continue en 0 :elle ne vérifie pas le critère séquentiel de continuité en 0.

2. Puisque $\forall x\neq 0$, $|g(x)|\leqslant |x|$, on a d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to 0} g(x)=0=g(0),$$

la fonction g est donc continue en 0.

Solution 3.

1. Let $x,y\geqslant 0$. Without loss of generality we can suppose that $y\leqslant x$. Then we have

$$\begin{aligned}\sqrt{x}-\sqrt{y}\leqslant\sqrt{x-y}\quad&\Longleftrightarrow\quad x-2\sqrt{xy}+y\leqslant x-y\\ &\Longleftrightarrow\quad y\leqslant\sqrt{xy}\quad\text{(true !)}\end{aligned}$$

2. Let $\varepsilon>0$. Put $\delta=\varepsilon^2$. Then for all $x,y\geqslant 0$ we have

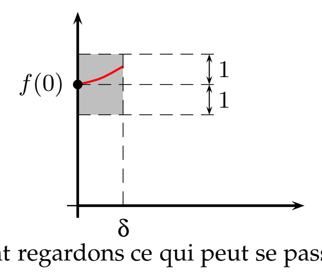
$$|x-y|<\delta\implies\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\leqslant\sqrt{|x-y|}\leqslant\sqrt{\delta}=\varepsilon\,.$$

Solution 4.

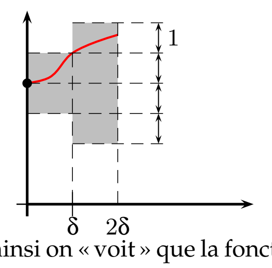
En prenant $\varepsilon=1$ dans la définition de la continuité uniforme, on sait qu'il existe $\delta>0$ tel que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ on a

$$|x-y|\leqslant\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x)-f(y)|\leqslant 1.$$

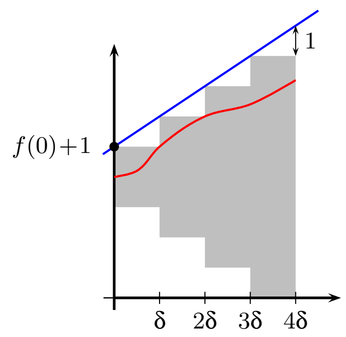
Regardons d'abord graphiquement ce qui se passe à droite de 0. Nous supposons, dans les dessins suivants, que $f(0)$ est positif. Entre 0 et δ la courbe de f doit être contenue dans le rectangle hachuré.



Maintenant regardons ce qui peut se passer en δ. Dans le « pire » des cas la courbe passera par l'un des deux sommets du côté droit du rectangle hachuré. Alors, entre δ et 2δ la courbe de f doit être contenue dans la partie hachurée suivante.



En continuant ainsi on « voit » que la fonction est bien majorée pour $x>0$ par une fonction affine ayant $1/\delta$ pour coefficient directeur et $f(0)+1$ comme ordonnée à l'origine :



Il ne reste qu'à formaliser de cette idée ! Nous établissons d'abord la majoration demandée sur $\mathbb{R}_+$. Soit donc $x\geqslant 0$. Il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que x est dans l'intervalle $[n\delta,(n+1)\delta[$; autrement dit $n=[x/\delta]$. En utilisant l'inégalité triangulaire sur une somme « accordéon » on obtient

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\left|f(0)+\sum_{k=1}^{n} f(k\delta)-f((k-1)\delta)+(f(x)-f(n\delta))\right|\\ &\leqslant|f(0)|+\sum_{k=1}^{n}|f(k\delta)-f((k-1)\delta)|+|f(x)-f(n\delta)|\\ &\leqslant|f(0)|+n+1\ \leqslant\ \frac{x}{\delta}+1+|f(0)|\,.\end{aligned}$$

Il existe donc $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $|f(x)|\leqslant ax+b$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$. On peut faire le même raisonnement pour $x\in\mathbb{R}^-$.

Solution 5.

D'après la définition de la limite, il existe $A \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \geqslant A,\ \ |f(x) - \ell| \leqslant 1,$$

ainsi $\forall x \geqslant A$,

$$|f(x)| \leqslant 1 + |\ell|.$$

De plus, f étant continue sur le segment $[0, A]$, elle est bornée sur cet intervalle :il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in [0, A]$,

$$|f(t)| \leqslant M.$$

En posant

$$M' = \max(|\ell| + 1, M),$$

on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f(x)| \leqslant M'.$$

Solution 6.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction lipschitzienne sur cet intervalle. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

2. On a, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(g(x))^2 &= |g(x)|^2 = |f(x) - f(0)|^2\\ &= |x - 0|^2 = x^2\end{aligned}$$

De plus, pour tous réels x et y,

$$\begin{aligned}(g(x) - g(y))^2 &= |g(x) - g(y)|^2 = |f(x) - f(y)|^2\\ &= |x - y|^2 = x^2 - 2xy + y^2\end{aligned}$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned}(g(x) - g(y))^2 &= (g(x))^2 - 2g(x)g(y) + (g(y))^2\\ &= (g(x))^2 - 2g(x)g(y) + y^2\end{aligned}$$

et donc

$$g(x)g(y) = xy.$$

3. On remarque que g est injective (si $g(x) = g(y)$ alors $f(x) = f(y)$ et $|x - y| = 0$, d'où $x = y$). Comme $g(0) = 0$, on a $g(1) \neq 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = \frac{x}{g(1)}.$$

Ainsi $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = ax + b.$$

Réciproquement, une fonction de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = ax + b,$$

avec a et b réels est une isométrie *si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |a(x - y)| = |x - y|,$$

ie *si et seulement si* $|a| = 1$, ie $a = \pm$. Les seules isométries de $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \pm x + b,$$

avec $b \in \mathbb{R}$.

Solution 7.

Notons $f(t)$ la distance en km parcourue par le marcheur à l'instant $t \in [0, 1]$. Notons

$$g(t) = f(t + 1/2) - f(t).$$

On a

$$\frac{g(0) + g(1/2)}{2} = f(1) = 12/2 = 6$$

ainsi 6 est le milieu de l'intervalle d'extrémités $g(0)$ et $g(1/2)$. Puisque g est continue sur $[0, 1/2]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0, 1/2]$ tel que $g(t_0) = 6$. Le marcheur pourcourt donc 6 km entre les instants t_0 et $t_0 + 1/2$.

Solution 8.

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'une telle application. Comme

$$f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ \text{ et } \ f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q},$$

f prendrait deux valeurs *distinctes* $a = f(1)$ et $b = f(\sqrt{2})$. On déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires que f prend toutes les valeurs réelles comprises entre a et b. Or, $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, $f(\mathbb{Q})$ est au plus dénombrable. Comme $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est au plus dénombrable et on en déduit que $f(\mathbb{R})$, l'ensemble des valeurs prises par f est au plus dénombrable. C'est absurde car il existe une infinité non-dénombable de réels entre a et b.