

Exercice 1.

Find all numbers n in \mathbb{N}^* such that there exists a continuous function from \mathbb{R} to \mathbb{R} which takes every value exactly n times.

Exercice 2.

Les deux questions sont indépendantes.

1. Démontrer que l'équation

$$e^x = x^3 + x^2 + x + 2$$

possède au moins deux solutions réelles.

2. Démontrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

Exercice 3.

Voici un grand classique.

1. Démontrer que la fonction indicatrice de \mathbb{Q} , définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

n'est continue en *aucun* point.

2. Démontrer que l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 f_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue en 0 (et même dérivable en 0), alors qu'elle est discontinue en tout autre point.

Exercice 4.

L'objectif de cet exercice est de prouver que l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \}$$

est dense dans \mathbb{R} .

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $b \in \mathcal{B}$ tel que $0 < b < \varepsilon$.

2. Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$ et soit $\varepsilon = y - x > 0$. Dédurre de la question 1. l'existence de $b' \in \mathcal{B}$ tel que $x < b' < y$.

3. Comment conclure ?

Exercice 5.

Etablir que $E = \{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 6.

Que dire de $x + y$ et xy dans les quatre cas suivants ?

- | | |
|---|--|
| 1. $x, y \in \mathbb{Q}$; | 3. $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; |
| 2. $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; | 4. $y \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. |

Exercice 7.

Prouver l'égalité

$$\bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[=]0, 1[\cup]1, 2[.$$

Exercice 8.

On définit la *partie fractionnaire* d'un nombre réel x par

$$\{x\} = x - [x].$$

- Calculer $\{54, 465\}$ et $\{-36, 456\}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer $\{x\}$ et $\{-x\}$.
- Prouver que la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto \{x\}$$

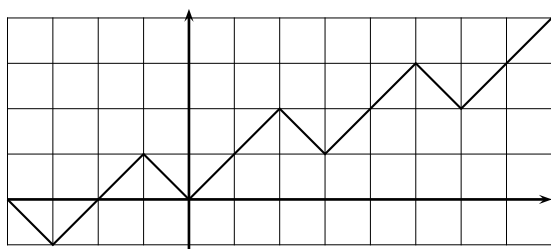
est périodique et tracer son graphe.

1. Solutions

Solution 1.

Let's prove that these numbers are exactly the odd numbers.

► For the case $n = 1$ the identity function is a good example. For $n = 3$ the following zigzag function works fine :



For $n = 5$ just add one edge, for $n = 7$ add two, and so forth.

► Let n be even. Assume that there is a continuous function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ which takes every value exactly n times. Let $x_j, j = 1, \dots, n$, be the zeros of f , i.e., the n values where f takes the value 0. We can order them in a such way that $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. For convenience we put $x_0 = -\infty$ and $x_{n+1} = +\infty$. Then f is either positive or negative on any interval

Solution 2.

1. La fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x - (x^3 + x^2 + x + 2)$$

est continue (combinaison linéaire de fonctions continues), tend vers $+\infty$ aussi bien au voisinage de $+\infty$ qu'au voisinage de $-\infty$, alors que $f(0) = -1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation

$$f(x) = 0$$

Solution 3.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

► **Premier cas :** x_0 est irrationnel, donc

$$f_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0.$$

Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe une suite de rationnels $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 et par conséquent,

$$f_{\mathbb{Q}}(x_0) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\mathbb{Q}}(q_n) = 1,$$

donc $f_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x_0 .

► **Deuxième cas :** x_0 est rationnel, donc

$$f_{\mathbb{Q}}(x_0) = 1.$$

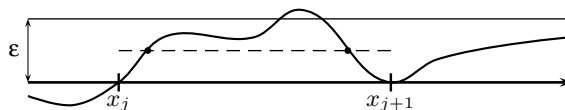
Cette fois, il existe une suite d'irrationnels $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 et, cette fois encore,

$]x_j, x_{j+1}[, j = 0, \dots, n$. In fact, if f changed sign on such an interval then the intermediate value theorem would supply an additional zero of f . Let us now treat different cases.

Suppose $f > 0$ on $]x_0, x_1[$ and $]x_n, x_{n+1}[$. Then the minimum of f on $[x_1, x_n]$ is global, and so f takes no value below that minimum. Contradiction. ζ

Similarly the case $f < 0$ on $]x_0, x_1[$ and $]x_n, x_{n+1}[$ also leads to a contradiction. ζ

Suppose now that $f > 0$ on $]x_0, x_1[$ and $f < 0$ on $]x_n, x_{n+1}[$ (the other case being similar). Let $k = n/2$. Among the intervals $]x_j, x_{j+1}[, j = 1, \dots, n-1$, there are at least k intervals on which $f > 0$ or there are at least k intervals on which $f < 0$. Let's focus on the first of those two cases (the other one being similar). In each interval $]x_j, x_{j+1}[, j = 0, \dots, n-1$, where $f > 0$ we pick a real number. Consider the images of those numbers by f and let ϵ be the smallest of those images. According to the intermediate value theorem, the value $\epsilon/2$ is taken at least once on $]x_0, x_1[$. And it is taken at least twice on each interval $]x_j, x_{j+1}[, j = 1, \dots, n-1$, where $f > 0$. Altogether $\epsilon/2$ is taken at least $1 + 2k$ times. Contradiction. ζ



possède au moins une solution strictement négative et au moins une solution strictement positive.

2. Lorsqu'un polynôme est de degré impair, ses limites au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ sont infinies et de signes opposés. Comme un polynôme est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une racine réelle au moins.

$$f_{\mathbb{Q}}(x_0) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\mathbb{Q}}(z_n) = 0,$$

donc $f_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x_0 .

2. Notons $f(x) = x^2 f_{\mathbb{Q}}(x)$. Comme $f_{\mathbb{Q}}$ est bornée, au voisinage de 0,

$$f(x) = \mathcal{O}(x^2) = 0 + 0 \cdot x + o(x),$$

donc f est continue en 0, dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Soit $x_0 \neq 0$. Si f était continue en x_0 , alors $f_{\mathbb{Q}}$ serait aussi continue en x_0 , puisque la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est continue au voisinage de ce point et que

$$f_{\mathbb{Q}}(x) = \frac{f(x)}{x^2}.$$

Par conséquent, la fonction f n'est continue en aucun autre point que 0.

Solution 4.

1. Posons $\forall n \geq 1$,

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

puisque cette suite est strictement positive et tend vers 0, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \geq 1$ tel que

$$0 < u_{n_0} < \varepsilon.$$

Le réel $b = u_{n_0} \in \mathcal{B}$ convient donc.

2. L'intervalle

$$\left] \frac{x}{b}, \frac{y}{b} \right[\subset \mathbb{R}_+$$

étant de longueur $\varepsilon/b > 1$, il contient au moins un entier naturel n ; on vérifie que $nb \in]x, y[$, de plus $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$b = \sqrt{p} - \sqrt{q},$$

ainsi

Solution 5.

Soient $x < y$. On a donc, par stricte croissance sur \mathbb{R} de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$,

$$\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}.$$

Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que

Solution 6.

1. On a $x + y$ et xy dans \mathbb{Q} .

2. Il peut tout se passer... Par exemple

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

mais $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$. De même, $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$ mais

Solution 7.

D'abord nous remarquons que

$$\bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[=]1, 2[\cup B, \quad \text{où } B = \bigcup_{n \geq 2} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[.$$

Il s'agit donc de prouver $B =]0, 1[$.

Première preuve. Pour tout $n \geq 2$ on pose

$$B_n = \bigcup_{k=2}^n \left] \frac{1}{k}, \frac{2}{k} \right[.$$

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2$ on a $B_n = \left] \frac{1}{n}, 1 \right[$. C'est évident pour $n = 2$. Supposons l'égalité vraie à un certain rang $n \geq 2$. Alors

$$nb = \sqrt{n^2 p} - \sqrt{n^2 q} \in \mathcal{B}.$$

et $]x, y[\cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.

◊ Cas 1 : $x < 0 < y$, $0 \in \mathcal{B} \cap]x, y[$.

◊ Cas 2 : $0 \leq x < y$, par la question b., il existe $b \in \mathcal{B} \cap]x, y[$.

◊ Cas 3 : $x < y \leq 0$, par la question b., il existe $b \in \mathcal{B} \cap]-y, -x[$, on remarque alors que $-b \in \mathcal{B}$ et ainsi $-b \in \mathcal{B} \cap]x, y[$.

Dans tous les cas,

$$\mathcal{B} \cap]x, y[\neq \emptyset,$$

et \mathcal{B} est dense dans \mathbb{R} .

$$\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y},$$

d'où

$$x < r^3 < y.$$

Ainsi E est dense dans \mathbb{R}

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}!$$

3. On a $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si $x = 0, xy = 0 \in \mathbb{Q}$ mais par contre lorsque $x \neq 0, xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4. C'est la même situation qu'au 3.

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= B_n \cup \left] \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1} \right[\\ &= \left] \frac{1}{n}, 1 \right[\cup \left] \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1} \right[\\ &= \left] \frac{1}{n+1}, 1 \right[. \end{aligned}$$

La dernière égalité ci-dessus vient de l'encadrement $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n+1} < 1$ qui se vérifie facilement en multipliant par $n(n+1)$.

On conclût que

$$B = \bigcup_{n \geq 2} B_n = \bigcup_{n \geq 2} \left] \frac{1}{n}, 1 \right[=]0, 1[.$$

Deuxième preuve. Raisonnons par double inclusion.

► Soit $a \in B$. Alors par définition de B il existe $n_0 \geq 2$ tel que $a \in \left] \frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0} \right[$. Donc $0 < \frac{1}{n_0} < a < \frac{2}{n_0} \leq 1$. Ainsi $a \in]0, 1[$.

► Soit $a \in]0, 1[$. Alors l'intervalle $] \frac{1}{a}, \frac{2}{a} [$ est de largeur strictement plus grand que 1, et contient donc un nombre entier n_0 . Ainsi

$$1 < \frac{1}{a} < n_0 < \frac{2}{a},$$

donc $n_0 \geq 2$ et en multipliant par x/n_0 on obtient

$$\frac{1}{n_0} < a < \frac{2}{n_0},$$

c'est-à-dire $a \in] \frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0} [\subset B$.

► *Alternative.* Soit $a \in]0, 1[$. La suite $(an)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée. Il existe donc

Solution 8.

1. On a clairement

$$\{54, 465\} = 0,465 \text{ et } \{-36, 456\} = 0,544.$$

2. Si $x \in \mathbb{Z}$,

$$\{-x\} = \{x\}.$$

Si $x \notin \mathbb{Z}$, on a $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ donc

$$\{-x\} = 1 - \{x\}.$$

3. on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$n_0 = \min \{n \in \mathbb{N} \mid na > 1\}.$$

On a alors $n_0 a > 1$ et donc $n_0 > \frac{1}{a} > 1$, c'est-à-dire $n \geq 2$. Peut-on avoir $(n_0 - 1)a > 1$? Non, car n_0 est le plus petit entier n tel que $na > 1$, et $n_0 - 1$ serait encore plus petit! Donc

$$(n_0 - 1)a \not> 1,$$

ou autrement dit $(n_0 - 1)a \leq 1$, d'où $n_0 a \leq 1 + a < 2$. On a alors l'encadrement

$$1 < n_0 a < 2$$

ce qui montre que $a \in] \frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0} [\subset B$.

$$\{x + 1\} = x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = \{x\}.$$

D'où l'allure du graphe de la partie fractionnaire ...

