Exercice 1.

The *harmonic* (resp. *geometric* resp. *arithmetic*) *mean* of two positive real numbers x and y are defined by

$$h(x,y) = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}, \quad g(x,y) = \sqrt{xy} \quad a(x,y) = \frac{x+y}{2}.$$

1. Show that $h(x,y) \leqslant g(x,y) \leqslant a(x,y)$.

2. Suppose that $0 < x < y$. Let $(u_n)_{n\geqslant 0}$ and $(v_n)_{n\geqslant 0}$ be the sequences defined recursively by $u_0 = a$, $v_0 = b$ and

$$u_{n+1} = h(u_n, v_n), \qquad v_{n+1} = a(u_n, v_n).$$

Show that $\lim u_n = \lim v_n = g(x,y)$.

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer les résultats suivants.

Théorème de Césaro

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = a$.
En autres termes : si une suite converge, alors la suite de ses moyennes arithmétiques converge vers la même limite.

Corollaire 1
Si $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = a$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = a$.

Corollaire 2
Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$.

Applications : Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geqslant 0$,

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n).$$

Exprimer u_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite.

Exercice 4.

Soit $(\phi_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 0, \ \ \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

1. Exprimer ϕ_n en fonction de n.

2. Montrer que $\forall n \geqslant 0$,

$$\phi_{n+1}^2 = \phi_n \phi_{n+2} + (-1)^n.$$

3. Déduire de tout ce qui précède que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{\phi_n \phi_{n+1}}$$

converge vers une limite ℓ à préciser.

Exercice 5.

Etudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}.$$

Exercice 6.

Etudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) + 1.$$

Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}.$$

1. En remarquant que

$$u_0 = \cos(\pi/2) \ \text{ et } \ u_1 = \cos(\pi/4),$$

calculer u_n en fonction de π et n.

2. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On pose

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{2^n \sin\left(\pi/2^{n+1}\right)}.$$

Etudier la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Solutions

Solution 1.

1. For all $x, y > 0$,

$$a(x,y) - g(x,y) = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geqslant 0$$

and

$$g(x,y) - h(x,y) = \sqrt{xy} - \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \sqrt{xy} - \frac{2xy}{y+x} = \sqrt{xy}\left(1 - \frac{2\sqrt{xy}}{y+x}\right) = \sqrt{xy}\,\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{y+x} \geqslant 0.$$

2. Obviously both sequences are strictly positive. Since $u_0 < v_0$ and since the harmonic mean is smaller than the arithmetic mean we have

$$\forall\, n \geqslant 0 \;:\; u_n \leqslant v_n.$$

Moreover

$$\forall\, n \geqslant 0 \;:\; v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leqslant \frac{v_n+v_n}{2} = v_n,$$

which means the sequence $(v_n)_{n\geqslant 0}$ is decreasing. On the other hand for all $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}} - u_n = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - \frac{u_n(u_n+v_n)}{u_n+v_n} = \frac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n} \geqslant 0,$$

which means the sequence $(u_n)_{n\geqslant 0}$ is increasing; moreover v_0 is an upper bound of $(u_n)_{n\geqslant 0}$, and therefore the sequence is convergent to a real limit, say ℓ.
On the other hand $(v_n)_{n\geqslant 0}$ is decreasing and has u_0 as a lower bound, therefore it converges to say ℓ'. Taking the limit in

$$\forall\, n \geqslant 0 \;:\; v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$$

yields $\ell = \ell'$.
Since for all $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}\,\frac{u_n+v_n}{2} = u_nv_n$$

the number u_nv_n is independent of n, and thus

$$\forall\, n \geqslant 0 \;:\; u_nv_n = u_0v_0 = xy.$$

Taking the limit yields $\ell^2 = xy$, and since $\ell \geqslant 0$ we get $\ell = \sqrt{xy}$.

Solution 2.

Preuve du théorème :
Posons $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k$ et supposons $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. On distingue trois cas :

- $a \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ un (petit) réel donné. On sait

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N\,, \;\; |u_n - a| < \varepsilon\,.$$

Alors, avec ce N fixé,

$$\exists\, N' \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N'\,, \;\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - a| < \varepsilon\,.$$

Ainsi pour tous $n > \max(N, N')$ on a

$$|U_n - a| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - a)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - a| < \varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\varepsilon = \varepsilon + \frac{n-N}{n}\varepsilon < 2\varepsilon\,.$$

Cela prouve que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

- $a = +\infty$. Soit $R > 0$ un (grand) réel donné. On sait

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N\,, \;\; u_n > 3R\,.$$

Alors, avec ce N fixé,

$$\exists\, N' \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N'\,, \;\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k > -R\,.$$

En plus, comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-N}{n} = 1$, on sait que

$$\exists\, N'' \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N''\,, \;\; \frac{n-N}{n} > \frac{2}{3}\,.$$

Ainsi pour tous $n > \max(N, N', N'')$ on a

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} u_k > -R + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} 3R = -R + \frac{n-N}{n}\,3R > -R + \frac{2}{3}\,3R = R\,.$$

Cela prouve que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

- $a = -\infty$. Même raisonnement.

Preuve du corollaire 1 :
On suppose $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = a$. Pour tout $n \geqslant 1$ posons $v_n = u_n - u_{n-1}$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$ et

$$\frac{u_n}{n} = \frac{u_0}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k\,.$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_0}{n} = 0$ on conclût grâce au théorème.

Preuve du corollaire 2 :
On comprend bien que ce corollaire est une version "multiplicative" du précédent corollaire "additif". C'est pourquoi nous allons utiliser les isomorphismes ℓn et $\exp$ comme "traducteurs".
On suppose donc que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = a \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Posons $w_n = \ell n\, u_n$.

$$\lim_{n\to\infty} (w_{n+1} - w_n) = \lim_{n\to\infty} \ell n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell n\, a\,,$$

où, pour traiter également les ces $a = 0$ ou $a = +\infty$, nous utilisons les conventions $\ell n\, 0 = -\infty$ et $\ell n(+\infty) = +\infty$. Grâce au corrollaire 1 on obtient $\lim_{n\to\infty} w_n/n = \ell n\, a$. Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \exp(w_n/n) = \exp(\ell n\, a) = a\,,$$

avec les conventions $\exp(-\infty) = 0$ et $\exp(+\infty) = +\infty$.

Applications du corollaire 2 :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty\,.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \lim_{n\to\infty} = \frac{(2n+2)!\, n!^2}{(n+1)!^2\,(2n)!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4\,.$$

Solution 3.

Les racines de l'équation caractéristique

$$z^2 - \frac{1}{2}(z+1) = 0$$

sont 1 et $-\frac{1}{2}$, il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \geqslant 0,\ \ u_n = \lambda + \mu\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Puisque

$$u_0 = \lambda + \mu,\ \ u_1 = \lambda - \frac{\mu}{2},$$

on aboutit à

$$\lambda = \frac{u_0 + 2u_1}{3},\ \ \mu = \frac{2u_0 - 2u_1}{3}.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda = \frac{u_0 + 2u_1}{3}.$$

Solution 4.

1. Les racines de l'équation caractéristique $z^2 - z - 1 = 0$, sont

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \geqslant 0$,

$$\phi_n = \lambda\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \mu\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

$$\phi_0 = 0 = \lambda + \mu,\ \ \phi_1 = 1 = -\sqrt{5}\lambda,$$

on aboutit à

$$\lambda = -\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

On a donc, $\forall n \geqslant 0$,

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\right].$$

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n = \phi_{n+1}^2 - \phi_n\phi_{n+2}.$$

On a alors ,

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \phi_{n+1}^2 - \phi_n(\phi_{n+1} + \phi_n)\\
&= \phi_{n+1}^2 - \phi_n^2 - \phi_n\phi_{n+1}\\
&= \phi_{n+1}(\phi_{n+1} - \phi_n) - \phi_n^2\\
&= \phi_{n+1}\phi_{n-1} - \phi_n^2\\
&= -\alpha_{n-1}
\end{aligned}$$

La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est donc géométrique de raison -1 et de premier terme $\alpha_0 = 1$, on a donc pour tout $n \geqslant 0$,

$$\phi_{n+1}^2 = \phi_n\phi_{n+2} + (-1)^n.$$

3. On prouve par une récurrence sans difficulté que

$$\forall n \geqslant 1,\ \ \phi_n > 0,$$

ce qui justifie l'existence de la somme étudiée que nous noterons σ_n. D'après la formule démontré à la question **2.** , pour tout $k \geqslant 1$,

$$\phi_{k+1}^2 = \phi_k\phi_{k+2} + (-1)^k,$$

d'où en divisant par $\phi_k\phi_{k+1} > 0$,

$$\frac{\phi_{k+1}}{\phi_k} = \frac{\phi_{k+2}}{\phi_{k+1}} + \frac{(-1)^k}{\phi_k\phi_{k+1}},$$

et donc

$$\frac{(-1)^k}{\phi_k\phi_{k+1}} = \beta_k - \beta_{k+1}$$

où

$$\beta_k = \frac{\phi_{k+1}}{\phi_k}.$$

Après telescopage , il reste donc

$$\sigma_n = \beta_1 - \beta_{n+1}.$$

Or ,

$$\phi_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n,$$

d'où

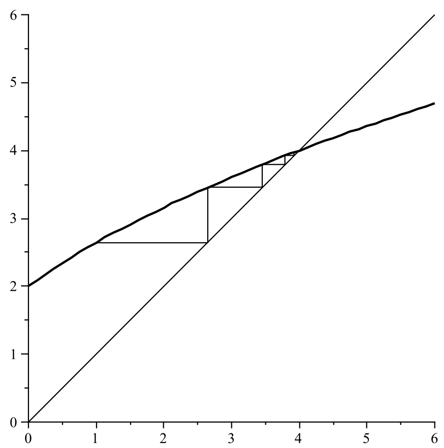
$$\beta_{n+1} \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et puisque $\beta_1 = 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Solution 5.

► *Une figure pour commencer.*



Comme, $|f'|$ semble majoré par un réel strictement inférieur à 1 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ stable par f, on va essayer d'appliquer l'IAF.

► *Définition de la suite* : le terme u_1 est défini *si et seulement si*

$$u_0 \geqslant -\frac{4}{3},$$

et dans ce cas $u_1 \geqslant 0$. Notons $I = \mathbb{R}_+$ et f l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto \sqrt{4+3x}.$$

La suite est bien définie dès que $u_0 \geqslant -\frac{4}{3}$ puisque l'on a $f(I) \subset I$.

► *Convergence de la suite* : un réel x est point fixe de f *si et seulement si*

$$x \geqslant 0 \text{ et } x^2 = 4+3x,$$

ie $x = 4$. La seule (et éventuelle !) limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc 4. La fonction f est dérivable sur I et sur cet intervalle ,

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4+3x}} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur I

$$\forall x, y \in I, \ \ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{3}{4}|x-y|.$$

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(4) = 4$,

$$|u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 4|,$$

et par une récurrence immédiate,

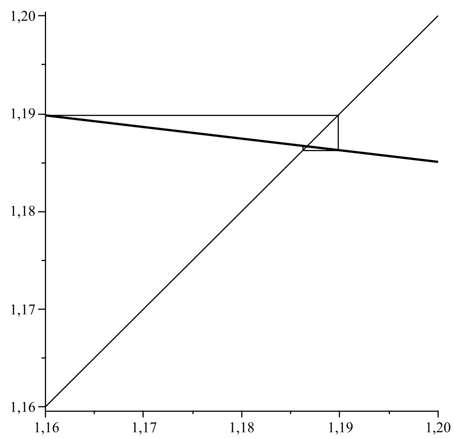
$$|u_n - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} |u_1 - 4|.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 4.$$

Solution 6.

► *Commençons par une figure.*



Comme $|f'|$ semble majoré sur $I = [3/4, 5/4]$ (intervalle stable par f) par un réel strictement inférieur à 1, on va tenter d'appliquer l'IAF.

► *Définition de la suite* : le terme u_1 est défini *si et seulement si*

$$u_0 \neq 0.$$

Notons

$$I = \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$$

et f l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto 1 + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

La suite est bien définie dès que $u_0 \neq 0$ puisque $f(I) \subset I$.

► *Etude de la convergence* : prouvons que f admet un unique point fixe appartenant à I. La fonction f est dérivable sur I et sur cet intervalle ,

$$\left|f'(x)\right| = \frac{1}{4x^2}\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \frac{4}{9}.$$

En notant g la fonction définie sur I par

$$x \in I \longmapsto f(x) - x.$$

L'application g est dérivable sur I et sur cet intervalle ,

$$g'(x) = f'(x) - 1 \leqslant \frac{4}{9} - 1 < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur I. Puisque

$$g(3/4) \geqslant 0, \ \ g(5/4) \leqslant 0,$$

g admet un zéro d'après le théorème des valeurs intermédiaires ; ce dernier est unique par stricte croissance de g, notons le ℓ. Appliquons à f l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle I

$$\forall x, y \in I, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \frac{4}{9}|x - y|.$$

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\ell) = \ell$,

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \ell|,$$

et par une récurrence immédiate ,

$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|u_1 - \ell|.$$

Ainsi , d'après le théorème d'encadrement ,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

Solution 7.

1. On conjecture que $\forall n \geqslant 0$,

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Prouvons cette formule par récurrence. Elle est banalement vérifiée aux rangs 0 et 1. Supposons-la vraie au rang n. On a alors,

$$\frac{u_n + 1}{2} = \cos^2\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right),$$

d'où, puisque $0 \leqslant \pi/2^{n+1} \leqslant \pi/2$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right).$$

La formule est donc acquise au rang $n + 1$; elle est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

2. Puisque $\pi/2^{n+1}$ tend vers 0 et que la fonction cosinus est continue en ce point,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

3. Raisonnons par récurrence. La formule est banale au rang 0. Supposons-la vérifiée au rang n.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n \times u_{n+1} \\ &= \frac{\cos(\pi/2^{n+2})}{2^n \sin(\pi/2^{n+1})} \\ &= \frac{\cos(\pi/2^{n+2})}{2^{n+1} \sin(\pi/2^{n+2}) \cos(\pi/2^{n+2})} \\ &= \frac{1}{2^{n+1} \sin(\pi/2^{n+2})} \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n + 1$; elle est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence. On remarque alors que

$$v_n \sim \frac{1}{2^n \times \pi/2^{n+1}} = \frac{2}{\pi},$$

on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{2}{\pi}.$$