Exercice 1.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(\mathbf{E})\ :\ y' = |y|.$$

Exercice 2.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = f(x)$$

pour les seconds membres suivants :

1. $f(x) = x$,
2. $f(x) = e^{2x}$,
3. $f(x) = xe^{x}$.

Exercice 3.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(\mathbf{E})\ :\ y'' + y = \sinh(x)$.

Exercice 4.

Résoudre l'équation suivante

$$y'' - 2y' + 2y = e^{x}\sin(x).$$

Exercice 5.

Résoudre $xy' + y = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Montrer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

Résoudre l'équation

$$y^2 + x^2 - 2xyy' = 0$$

en effectuant le changement de fonction $z = y^2$.

Exercice 7.

Résoudre l'équation

$$y' = e^{x+y}.$$

On peut poser $z = e^{-y}$ ou faire une séparation des variables.

Exercice 8.

Soient g et k des constantes positives. On considère l'équation différentielle

$$(*)\quad \ddot{x} = -g - k|\dot{x}|\dot{x}.$$

1. Expliquer pourquoi cette équation décrit la distance x entre le sol terrestre et un objet de masse 1 lancé vers le haut ou en chute libre ; la constante g étant l'accélération du champ de pesanteur terrestre et la force de frottement avec l'air étant proportionnelle au carré la vitesse.
2. Résoudre l'équation $(*)$ pour un objet en chute libre. Montrer que sa vitesse ne peut pas dépasser une certaine *vitesse limite*.
3. Résoudre l'équation $(*)$ pour objet lancé vers la haut. Montrer que la durée de la montée est majorée par une *durée limite* indépendante de la vitesse initiale.

1. Solutions

Solution 1.

On remarque que, pour toute solution y,

$$y' = |y| \geqslant 0$$

et donc y est croissante sur $\mathbb{R}$. Il y a alors deux cas de figure :

► *y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$:* comme y est continue (en tant que fonction dérivable), on en déduit qu'elle garde un signe *strict* constant.

- Si $y > 0$, on a
$$y' = y$$
et donc y est de la forme
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ y(x) = Ce^x$$
avec $C > 0$.

- Si $y < 0$, on a
$$y' = -y$$
et donc y est de la forme
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ y(x) = C'e^{-x}$$
avec $C' < 0$.

► *y s'annule en un point x_0 :* alors $x \geqslant x_0 \Rightarrow y(x) \geqslant 0$ et, sur $[x_0, +\infty[$, on a $y' = y$ et y vérifie

$$\forall x \geqslant x_0,\ \ y(x) = Ce^x$$

avec $C \geqslant 0$. Comme $y(x_0) = 0$, on a $C = 0$. De même, $y' = -y$ sur $]-\infty, x_0]$ et y vérifie

$$\forall x \leqslant x_0,\ \ y(x) = C'e^{-x}$$

avec $C' \leqslant 0$. Comme $y(x_0) = 0$, on a $C' = 0$. Ainsi y est nulle sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, on vérifie que les fonctions de la forme

$$x \in \mathbb{R},\ \ x \mapsto Ce^x,\ \ C \geqslant 0$$

et

$$x \in \mathbb{R},\ \ x \mapsto C'e^{-x},\ \ C' \leqslant 0$$

sont des solutions de $(\mathbf{E_1})$.

Solution 2.

Toutes les équations qui suivent admettent le même polynôme caractéristique de solutions 1 et 2. L'équation $(\mathbf{E_H})$ admet donc pour solutions les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{2x},\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{2x+3}{4} + \lambda e^x + \mu e^{2x},\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Puisque 2 est solution simple de l'équation caractéristique, l'équation admet une solution particulière de la forme $x \longmapsto axe^{2x}$. On aboutit à $a = 1$. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto xe^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{2x},$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Puisque 1 est solution simple de l'équation caractéristique, l'équation admet une solution particulière de la forme $x \longmapsto (ax^2 + bx)e^x$. On aboutit à $a = -1/2$ et $b = -1$. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto -(x^2/2 + x)e^x + \lambda e^x + \mu e^{2x},$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution 3.

On a $(\mathbf{E})\ :\ y'' + y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. les solutions de $(\mathbf{E_H})$ sont de la forme

$$x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x), \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

D'après le cours, il existe une solution particulière de la forme $x \mapsto ae^x + be^{-x}$. Après tout calcul, on trouve $(a, b) = (1/2, -1/2)$. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont donc de la forme

$$x \mapsto \frac{\sinh(x)}{2} + A\cos(x) + B\sin(x), \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution 4.

Passons sur $\mathbb{C}$ et recherchons une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 2y = e^{(1+i)x}.$$

Puisque les solutions de l'équation caratéristique sont $1 \pm i$, il existe une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto axe^{(1+i)x}.$$

On aboutit à $a = -i/2$. La partie imaginaire de cette solution particulière est une solution de l'équation initiale et vaut

$$x \longmapsto -\frac{x\cos(x)e^x}{2}.$$

La solution générale de $(\mathbf{H})$ s'écrivant

$$x \longmapsto (\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))e^x,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

Les solutions de $(\mathbf{E})$ sur I sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto -\frac{x\cos(x)e^x}{2} + (\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))e^x,$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution 5.

► *Résolution de l'équation homogène* : l'equation homogène admet des solutions de la forme

$$x \mapsto \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

► *Résolution sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$* : appliquons la méthode de la variation de la constante. Les solutions sont de la forme

$$y : x \mapsto \frac{C(x)}{x}$$

avec $C : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable et

$$\forall x \in I, \quad C'(x) = \cos(x)$$

et les solutions sont donc de la forme

$$x \in I \mapsto \frac{\sin(x) + C}{x}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

► *Résolution sur $\mathbb{R}$* : Comme

$$\frac{\sin(x) + C}{x} \underset{0}{=} \frac{C}{x} + 1 + o(1),$$

la seule solution prolongeable par continuité en 0 sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$) est

$$y : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}.$$

Du développement

$$y(x) \underset{0}{=} 1 + o(x)$$

on déduit que $y(0) = 1$ et que y est dérivable en 0 avec $y'(0) = 0$. On a alors que y vérifie l'équation en $x = 0$, il s'agit donc d'une solution sur $\mathbb{R}$. L'equation admet ainsi une unique solution sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}, \quad 0 \mapsto 1.$$

Solution 6.

Soit y une solution de l'équation sur un intervalle I. Alors la fonction $z = y^2$ est dérivable sur I et sur cet intervalle

$$z' = 2yy',$$

ainsi z est solution sur I de l'équation

$$z' - z = -x^2.$$

Recherchons une solution particulière de cette équation sous la forme

$$x \longmapsto ax^2 + bx + c.$$

On obtient $a = 1$ et $b = c = 2$. Les solutions de l'équation linéaire sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto x^2 + 2x + 2 + \alpha e^x.$$

Ainsi, y est sur I de la forme

$$x \longmapsto \pm\sqrt{x^2 + 2x + 2 + \alpha e^x}.$$

Réciproquement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, puisque le trinôme $x^2 + 2x + 2$ est strictement positif, la fonction définie par la formule précédente est définie sur une réunion d'intervalle(s) ouverts sur le(s)quel(s) elle est dérivable et vérifie l'équation initiale.

Solution 7.

Deux hommes, deux méthodes.

► Soit y une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Posons $z = e^{-y}$. La fonction z est dérivable sur I et sur cet intervalle, $z' = -y'e^{-y}$. La fonction y vérifie l'équation de l'énoncé *si et seulement si* z vérifie

$$z' = -e^x,$$

ie *si et seulement si* il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{-y} = z = -e^x + \alpha,$$

ce qui impose $\alpha > 0, I \subset]-\infty, \ell n(\alpha)[$ et

$$\forall x \in I, \quad y(x) = -\ell n(\alpha - e^x).$$

► Il s'agit d'une équation à variables séparées.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x+y} &\iff e^{-y}\mathrm{d}y = e^x\mathrm{d}x \\
&\iff \int e^{-y}\mathrm{d}y = \int e^x\mathrm{d}x \\
&\iff -e^{-y} = e^x + \alpha,
\end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$. Puis on conclût comme dans l'autre méthode...

Solution 8.

1. Rappel de mécanique : force, masse et accélération sont liées par l'équation $F = m\ddot{x}$. Dans notre cas la masse vaut 1 et la force F est constituée de deux composantes : gravitation et frottement. La force du champ de pesanteur terrestre est dirigée vers le bas, d'où le signe $-g$. A cela s'ajoute la force de frottement avec l'air, proportionnelle à la vitesse donc $\pm k\dot{x}^2$ où le signe est à prendre selon les a deux cas suivants.

► L'objet gagne de hauteur, c'est-à-dire $\dot{x} \geqslant 0$. Alors la force de frottement avec l'air est dirigée vers le bas. Donc on a $\ddot{x} = -g - k\dot{x}^2$.

► L'objet perd de hauteur (il retombe), c'est-à-dire $\dot{x} \leqslant 0$. Alors la force de frottement avec l'air est dirigée vers le haut. Donc on a $\ddot{x} = -g + k\dot{x}^2$.

L'équation $(*) \ : \ \ddot{x} = -g - k|\dot{x}|\dot{x}$ fusionne les deux cas. Dans tous les cas la force de frottement est dirigée au sens opposé du mouvement.

2. On pose $v = \dot{x}$. Dans le cas d'une chute $v(t) \leqslant 0$. On résoud l'équation différentielle par séparation des variables.

$$\begin{aligned}
(*) \ : \ & \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + kv^2 \\
\iff \ & \frac{\mathrm{d}v}{kv^2 - g} = \mathrm{d}t \\
\iff \ & \frac{1}{g}\int \frac{\mathrm{d}v}{\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)^2 - 1} = \int \mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

A ce stade on reconnaît l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}s}{1-s^2} &= \frac{1}{2}\ell\mathrm{n}\left|\frac{1+s}{1-s}\right| + C \\
&= \begin{cases} \operatorname{argth}(s) + C & \text{si } |s| < 1, \\ \operatorname{argcoth}(s) + C & \text{si } |s| > 1\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Il faut donc déterminer si dans notre cas la primitive est celle avec argth ou argcoth. Nous avons $kv^2 - g < 0$; sinon la force de frottement avec l'air serait plus grand que la force de gravitation et l'objet remonterait ! Pour $s = \sqrt{\frac{k}{g}}\,v$ on a alors $|s| < 1$. La primitive à choisir est donc celle avec argth.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{g}\int \frac{\mathrm{d}v}{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)^2} = \int \mathrm{d}t \\
\iff \ & -\frac{1}{\sqrt{gk}}\operatorname{argth}\left(\sqrt{\tfrac{k}{g}}\,v\right) = t - t_1 \\
\iff \ & \operatorname{argth}\left(\sqrt{\tfrac{k}{g}}\,v\right) = -\sqrt{kg}(t - t_1) \\
\iff \ & v(t) = -\sqrt{\frac{g}{k}}\operatorname{th}\left(\sqrt{kg}(t - t_1)\right).
\end{aligned}$$

La signification de la constante d'intégration t_1 est la suivante : au temps $t = t_1$ la vitesse est nulle.

Comme la fonction th est croissante avec limite 1 à l'infini, la vitesse limite est $v_\infty = -\sqrt{g/k}$. Elle n'est jamais atteinte.
Pour intégrer $v(t)$ on utilise le fait que $\ell\mathrm{n} \circ \cosh$ est une primitive de th. Donc

$$\iff \quad x(t) = -\frac{1}{k}\ell\mathrm{n}\left(\cosh\left(\sqrt{kg}(t - t_1)\right)\right) + R_1\,.$$

La constante d'intégration R_1 est la hauteur au moment t_1.

3. Dans le cas d'un lancer vers le haut on a $v(t) \geqslant 0$. On procède de la même manière que ci-dessus.

$$\begin{aligned}
(*) \ : \ & \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g - kv^2 \\
\iff \ & \frac{\mathrm{d}v}{kv^2 + g} = -\mathrm{d}t \\
\iff \ & \frac{1}{g}\int \frac{\mathrm{d}v}{\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)^2 + 1} = -\int \mathrm{d}t \\
\iff \ & \frac{1}{\sqrt{gk}}\arctan\left(\sqrt{\tfrac{k}{g}}\,v\right) = t_1 - t\,.
\end{aligned}$$

Expliquons la signification de la constante d'intégration t_1. Notons t_0 le moment où on lance l'objet. On voit sur l'équation ci-dessus qu'on a $v \geqslant 0$ *si et seulement si* $t_1 - t \geqslant 0$; autrement dit, la montée a lieu seulement pour $t \in [t_0, t_1]$. En $t = t_1$ la vitesse est nulle, puis l'objet tombe en chute libre.
La durée de la montée est $t_1 - t_0$. Or on a la majoration

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{\sqrt{gk}}\arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v(t_0)\right) < \frac{\pi}{2\sqrt{gk}}\,,$$

c'est-à-dire la durée de la montée ne peut pas être arbitrairement longue, même avec une très grande vitesse initiale $v(t_0)$.

Pour intégrer $v(t)$ on utilise le fait que $-\ell\mathrm{n} \circ \cos$ est une primitive de tan. Donc

$$\begin{aligned}
& v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\tan\left(\sqrt{kg}(t_1 - t)\right) \\
\iff \ & x(t) = \frac{1}{k}\ell\mathrm{n}\left(\cos\left(\sqrt{kg}(t_1 - t)\right)\right) + R_1\,.
\end{aligned}$$

La constante d'intégration R_1 est la hauteur maximale prise au moment du retour t_1.

Remarque – *Evidemment ce modèle ne correspond pas complètement à la réalité. On sait bien que si on lance un objet avec une très grande vitesse initiale il devrait quitter la terre et jamais y retourner. En fait, ni g ni k sont des constantes car la force gravitationnelle diminue avec la distance et le frottement dépend de la densité de l'air (il n'a plus de frottement en dehors de l'atmosphère).*