Exercice 1.

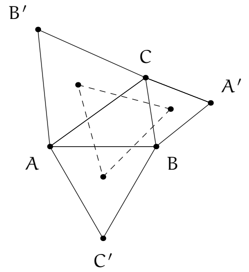
Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z}{1-z}$ soit réel.

Exercice 2.

Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que les points d'affixes 1, z et z^3 soient alignés.

Exercice 3.

Soit ABC un triangle quelconque. On construit à l'extérieur de chacun des côtés du triangle des triangles équilatéraux $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$.



Démontrer que les centres de gravité des trois triangles équilatéraux forment un triangle équilatéral.

Exercice 4.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Déterminer les vecteurs $\vec{x}$ tels que :

$$\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{x} \wedge \vec{v}.$$

Exercice 5.

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs $\vec{u}\,(-1,1,1)_{\mathscr{R}}$, $\vec{v}\,(1,2,-1)_{\mathscr{R}}$, $\vec{w}\,(2,0,3)_{\mathscr{R}}$.

Exercice 6.

Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les deux droites définies par les systèmes d'équations respectifs,

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + y - z = a \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ soient coplanaires.
2. En déduire alors l'équation du plan les contenant.

1. Solutions

Solution 1.

On a forcément $z \neq 1$. On poursuit selon deux méthodes indépendantes :

► Il est clair que 0 est solution. Soit donc $z \neq 0$. Alors

$$\frac{z}{1-z} \in \mathbb{R} \iff \frac{1-z}{z} \in \mathbb{R} \iff 1-\frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble recherché est donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

► On a

$$\frac{z}{1-z} \in \mathbb{R} \iff \frac{0-z}{1-z} \in \mathbb{R} \iff 0, 1 \text{ et } z \text{ sont alignés.}$$

Donc l'ensemble recherché est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Solution 2.

Il est clair que 1 est solution. Soit désormais $z \neq 1$. Alors la condition d'alignement s'écrit

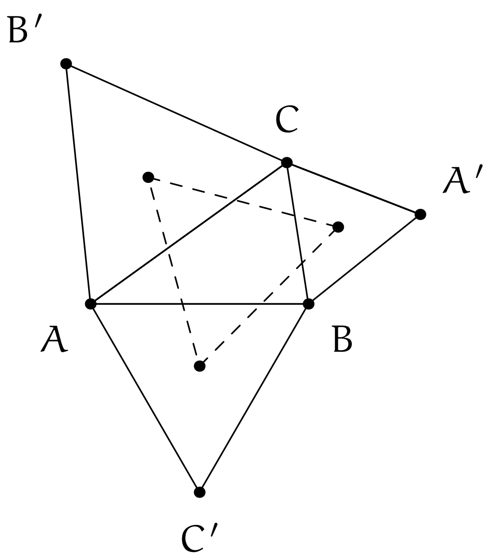
$$\frac{z^3-1}{z-1} \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$, ce qui est équivalent à $(z+1/2)^2 \in \mathbb{R}$, et finalement $z + 1/2$ est réel ou imaginaire pur . L'ensemble recherché est la réunion de l'axe réel et de la droite d'équation $x = -1/2$.

Remarque – *On a utilisé l'équivalence $z^2 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Elle se démontre sans peine en écrivant z sous forme algébrique ou sous forme polaire.*

Solution 3.

Soient a , b et c les affixes respectives des points A, B, C. Quitte à permuter les trois points, on peut supposer que ABC est direct. Travaillons en affixes dans un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$ d'origine A.



Dans ce cas de figure et d'après les constructions indiquées par l'énoncé :

$$\begin{cases} a' &= c + e^{i\pi/3}(b-c) \\ b' &= e^{i\pi/3}c \\ c' &= b + e^{i\pi/3}(-b) \end{cases}$$

En utilisant le fait que $-j^2 = e^{\,i\pi/3}$ puis $1 + j + j^2 = 0$, on aboutit à

$$\begin{cases} a' &= c + j^2(c-b) = -jc - j^2b \\ b' &= -j^2c \\ c' &= b + j^2b \end{cases}$$

En notant $A_1(a_1), B_1(b_1), C_1(c_1)$ les centres de gravité respectifs des triangles $A'BC$, $B'AC$ et $C'AB$ et la relation $1 + j + j^2 = 0$, on aboutit à :

$$\begin{cases} 3a_1 &= a' + b + c = (1-j)(c-j^2b) \\ 3b_1 &= b' + c \qquad = (1-j)(-j^2c) \\ 3c_1 &= c' + b \qquad = (1-j)b \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} 3(b_1 - a_1) = (1-j)(j^2b + jc) \\ \\ 3(c_1 - a_1) = (1-j)(-jb - c) \end{cases}$$

On remarque alors que

$$c_1 - a_1 = -j^2(b_1 - a_1) = e^{i\pi/3}(b_1 - a_1),$$

ie $\overrightarrow{A_1C_1}$ est l'image de $\overrightarrow{A_1B_1}$ par la rotation vectorielle d'angle $+\frac{\pi}{3}$:$A_1B_1C_1$ est donc équilatéral.

Solution 4.

L'égalité
$$\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{x} \wedge \vec{v}$$
est équivalente à
$$\vec{x} \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0},$$
i.e. $\vec{x}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont colinéaires. Il faut alors envisager deux cas.

- *Si* $\vec{u} = \vec{v}$. Tous les vecteurs sont solutions.
- *Si* $\vec{u} \neq \vec{v}$. L'ensemble des solutions est
$$\mathrm{vect}(\vec{u} - \vec{v}).$$

Solution 5.

Le volume est égal à $|\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = 15$.

Solution 6.

1. Les droites (on vérifie sans peine que ce sont bien des droites) $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ soient coplanaires *si et seulement si* elles sont parallèles ou sécantes. Comme les vecteurs
$$\vec{d}_1(4, 5, -7)_{\mathscr{R}} \quad \text{et} \quad \vec{d}_2(-2, 4, -2)_{\mathscr{R}}$$
sont des vecteurs directeurs directeurs de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ non colinéaires, les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont coplanaires *si et seulement si* elles sont sécantes, ie *si et seulement si* le système
$$\mathscr{S} : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & - & z & = & a \end{array} \right.$$
admet une solution. Par un calcul facile (commencer à multiplier la troisième équation par 2 et la soustraire de la première...), les trois premières équations à elles seules déterminent déjà $(x, y, z) = (2, 5/2, -7/2)$. Avec la dernière équation on voit qu'on doit prendre $a = 12$. Ainsi $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \{I\}$ avec
$$I(2, 5/2, -7/2)_{\mathscr{R}}.$$

2. Le plan contenant $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est de vecteur normal
$$\frac{1}{2}\vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2(9, 11, 13)_{\mathscr{R}},$$
il admet une équation cartésienne de la forme
$$9x + 11y + 13z = d.$$
Comme I appartient à ce plan, on a
$$d = 0.$$