

Exercice 1.

Quelques simplifications trigonométriques usuelles.

1. Donner une formule reliant $\cos(x)$ et $\tan(x)$ valable sur $] -\pi/2, \pi/2[$. En déduire une formule reliant $\sin(x)$ et $\tan(x)$ sur le même intervalle.

2. Quelle est l'ensemble de définition de la fonction définie par :

$$g(x) = \cos \left[\arctan \left(\sin \left(\arctan(x) \right) \right) \right] ?$$

3. Simplifier $g(x)$: les fonctions circulaires directes et réciproques doivent disparaître !

Exercice 2.

On pose $y = \arcsin \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)$. Calculer $\cos(4y)$ et en déduire la valeur de y .

Exercice 3.

Dans tout l'exercice, le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct \mathcal{R} .

1. Déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les nombres complexes z , $1/z$ et $1 + z$ aient même module.

2. Déterminer les nombres complexes tels que

$$|z - 1| = |\bar{z} + 1|.$$

Interprétation géométrique ?

3. Déterminer le lieu des points du plan dont l'affixe z vérifie

$$|(1 + i)\bar{z} - 2i| = 2.$$

Exercice 4.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouver que

$$z^2 \in \mathbb{R}^- \implies \operatorname{Re}(z) = 0.$$

Que pensez-vous de la réciproque ?

Exercice 5.

L'écriture sous forme trigonométrique d'un nombre complexe est à la base de l'étude des oscillateurs (mécaniques aussi bien qu'électriques) en Physique.

1. *Le résultat fondamental.*

1.a. Soient a et b dans \mathbb{R} . Montrer l'existence de $(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} a = A \cos(\varphi) \\ b = A \sin(\varphi) \end{cases}$$

1.b. Y-a-t-il unicité de (A, φ) ?

1.c. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x) + b \sin(x) = A \cos(x - \varphi).$$

2. *Application à la résolution d'équations trigonométriques.* Soient a , b et c dans \mathbb{R} . Discuter et résoudre l'équation

$$a \cos(x) + b \sin(x) = c$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3. *Applications numériques.* Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

3.a. $\cos(x) + \sin(x) = 1;$

3.b. $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = 1;$

3.c. $\cos(x) - 2 \sin(x) = 7;$

3.d. $\sqrt{3} \cos(x) + \sqrt{13} \sin(x) = 2.$

Exercice 6.

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n \cos(k\pi)$

3. $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$

2. $\sum_{k=0}^n 2^k \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$

4. $\sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$

1. Solutions

Solution 1.

1. On a, $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{1 - \sin^2(x)},$$

et ainsi,

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}, \quad \sin^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}.$$

2. La fonction arctangente étant définie sur \mathbb{R} , g est définie sur \mathbb{R} .

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\alpha = \arctan(x)$. On a, d'après les formules démontrées à la question a.,

$$\sin^2(\alpha) = \frac{x^2}{x^2 + 1},$$

Solution 2.

Y a pas d'secret : il faut faire apparaître du sinus puisque y est un arcsinus ...

$$\begin{aligned} \cos(4y) &= 1 - 2 \sin^2(2y) = 1 - 8 \sin^2(y) \cos^2(y) \\ &= 1 - 8u^2 [1 - u^2] \end{aligned}$$

où $u = \sin(y) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Après tout calcul,

$$\cos(4y) = -u = \sin(-y) = \cos(\pi/2 + y).$$

On a donc

$$4y \equiv \frac{\pi}{2} + y[2\pi] \text{ ou } 4y \equiv -\frac{\pi}{2} - y[2\pi],$$

Solution 3.

1. Si z et $1/z$ ont même module, alors $z \in \mathbb{U}$. Il existe donc un réel θ , compris entre $-\pi$ et π , tel que $z = e^{i\theta}$ et donc

$$|1 + z| = 2|\cos(\theta/2)| = 2 \cos(\theta/2)$$

puisque $-\pi/2 \leq \theta/2 \leq \pi/2$. Comme $|z| = 1$, on en déduit que $\cos(\theta/2) = 1/2$, donc $\theta = \pm 2\pi/3$ et $z = j$ ou $z = j^2$.

Réciproquement, on vérifie sans peine que j et j^2 vérifient bien la propriété voulue (notamment parce que $1 + j + j^2 = 0$). Donc les solutions sont j et j^2 .

2. Astuce ! Un complexe et son conjugué ont même module, donc on étudie en fait

Solution 4.

► Soit $z \in \mathbb{C}$. Ecrivons z sous forme algébrique,

$$z = x + iy,$$

où x et y sont réels. Raisonnons par contraposition : supposons $x \neq 0$; alors

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

et puisque $\arctan(x) = \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\sin(\alpha)$ a le même signe que x , donc

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Posons $\beta = \arctan(\sin(\alpha))$, on a

$$\cos^2(\beta) = \frac{1}{1 + \sin^2(\alpha)} = \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1},$$

et puisque $\beta \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\cos(\beta) > 0$, on a

$$f(x) = \cos(\beta) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 + 2x^2}}.$$

c'est-à-dire

$$y \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi/3] \text{ ou } y \equiv -\frac{\pi}{10} [2\pi/5].$$

Or y est l'arcsinus d'un nombre positif donc $y \in [0, \pi/2]$. Or la seule solution de la première congruence appartenant à cet intervalle est $\pi/6$ qui n'est donc pas y puisque

$$\sin(y) \neq \frac{1}{2} = \sin(\pi/6);$$

la seule solution de la seconde congruence appartenant à $[0, \pi/2]$ étant $3\pi/10$, nécessairement $y = \frac{3\pi}{10}$.

$$|z - 1| = |z + 1|.$$

Il s'agit de l'ensemble des points situés à même distance de 1 et de -1 , c'est l'axe des imaginaires purs.

3. On divise l'équation par $|1 + i| = \sqrt{2}$ et on conjugue :

$$\left| z + \frac{2i}{1 - i} \right| = \sqrt{2}.$$

C'est donc le cercle de centre $2i/(1 - i)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Deux cas de figure sont à envisager : soit $y = 0$ et alors $z^2 = x^2 > 0$ et donc $z^2 \notin \mathbb{R}^-$. Soit $y \neq 0$ et donc $\text{Im}(z^2) = 2xy \neq 0$ et $z^2 \notin \mathbb{R}^-$.

► La réciproque est banalement vraie.

Solution 5.

1. Le résultat fondamental.

1.a. Le nombre complexe $z = a + ib$ admet une forme polaire de la forme

$$z = a + ib = Ae^{i\varphi}$$

avec A et φ réels. Ainsi

$$\begin{cases} a = \operatorname{Re}(Ae^{i\varphi}) = A \cos(\varphi) \\ b = \operatorname{Im}(Ae^{i\varphi}) = A \sin(\varphi) \end{cases}$$

1.b. Le couple (A, φ) n'est pas unique car les couples

$$(-A, \varphi + (2n + 1)\pi), \quad (A, \varphi + 2\pi n)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ sont également des solutions.

REMARQUE – On peut prouver que ce sont les seules solutions pour $(a, b) \neq (0, 0)$.

1.c. On a clairement, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} a \cos(x) + b \sin(x) &= A(\cos(\varphi) \cos(x) + \sin(\varphi) \sin(x)) \\ &= A \cos(x - \varphi) \end{aligned}$$

2. Application à la résolution d'équations trigonométriques. Soient a, b et c dans \mathbb{R} .

► Si $(a, b) = (0, 0)$, l'équation est banale.

► Si $(a, b) \neq (0, 0)$, d'après la question précédente, en notant

$$A = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \varphi = \arg(a + ib),$$

l'équation est équivalente à

$$A \cos(x - \varphi) = c.$$

• Si $|c/A| > 1$, l'équation n'admet aucune solution réelle.

• Si $|c/A| \leq 1$, on note

$$\theta_0 = \arccos(c/A)$$

de sorte que l'équation s'écrit

Solution 6.

1. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(k\pi) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} \\ &= \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

2. En posant $j = e^{2i\pi/3}$ et en notant S_n la somme de l'énoncé,

$$\cos(x - \varphi) = \cos(\theta_0).$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\{ \pm \theta_0 + \varphi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

3. Applications numériques.

3.a. Ici

$$z = a + ib = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

L'équation devient

$$\cos(x - \pi/4) = \cos(\pi/4)$$

et l'ensemble des solutions est

$$\{ \pi/2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \cup 2\pi\mathbb{Z}.$$

3.b. On a

$$z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$$

L'équation s'écrit

$$\cos(x - \pi/6) = \frac{1}{2} = \cos(\pi/3)$$

et l'ensemble des solutions est donc

$$(\pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (-\pi/6 + 2\pi\mathbb{Z}).$$

3.c. On a

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{5} \text{ et } |7/\sqrt{5}| > 1$$

donc l'équation n'admet aucune solution réelle.

3.d. On a

$$z = a + ib = \sqrt{3} + i\sqrt{13} = 2e^{i\varphi}$$

avec $\varphi = \arctan(\sqrt{13/3})$. L'équation s'écrit

$$\cos(x - \varphi) = 1$$

et l'ensemble des solutions est donc

$$\{ \varphi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

$$\begin{aligned} S_n &= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^n 2^k e^{2ik\pi/3} \right] = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (2j)^k \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{2^{n+1} j^{n+1} - 1}{2j - 1} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{(2^{n+1} j^{n+1} - 1)(2j^2 - 1)}{(2j - 1)(2j^2 - 1)} \right) \\ &= \frac{1}{7} \operatorname{Re} \left(2^{n+2} e^{2i(n+3)\pi/3} - 2^{n+1} e^{2i(n+1)\pi/3} \right. \\ &\quad \left. - 2e^{4i\pi/3} + 1 \right) \\ &\quad \text{(car } j^3 = 1 \text{ et } j^2 + j = -1) \\ &= \frac{1}{7} \left[2^{n+2} \cos \left(\frac{2(n+3)\pi}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2^{n+1} \cos \left(\frac{2(n+1)\pi}{3} \right) + 2 \right] \end{aligned}$$

3. Comme d'habitude, nous distinguerons deux cas ...

► Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) &= \operatorname{Im} \left(\frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(e^{i((n+1)/2-1/2)\theta} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \right) \\ &= \frac{\sin(n\theta/2) \sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

► Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = 0.$$

4. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} (1 + \cos(2k\theta)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n 1 + \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(n + 1 + \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) \right) \end{aligned}$$

Et puis, la sempiternelle distinction de cas ...

► Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{2ik\theta} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{2i(n+1)\theta}}{1 - e^{2i\theta}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i(n+1)\theta} \frac{-2i \sin((n+1)\theta)}{-2i \sin(\theta)} \right) \\ &= \frac{\cos((n+1)\theta) \sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta) = \frac{1}{2} \left(n + 1 + \frac{\sin(2(n+1)\theta)}{2 \sin(\theta)} \right).$$

► Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta) = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1.$$