

Exercice 1.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{4^n} + 5$ est un entier naturel divisible par 7.

Exercice 2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

est un entier naturel.

Exercice 3.

Que pensez-vous du raisonnement suivant ?

« Montrons que dans une boîte contenant n crayons de couleur, tous les crayons sont de la même couleur. Par récurrence sur n : c'est vrai si $n = 0$ ou 1. Supposons la propriété vraie pour n . Soit une boîte à $n + 1$ crayons. On en enlève un. Tous ceux qui restent sont de la même couleur par hypothèse de récurrence. On rajoute ce crayon et on en enlève un autre. Ils sont de nouveau tous de la même couleur. Mais alors le dernier crayon rajouté est de la même couleur que les crayons restés dans la boîte. On a montré la propriété au rang $n + 1$. »

Exercice 4.

Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \qquad 2. \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1}$$

Exercice 5.

Quel est le coefficient de $a^4 b^2 c^3$ dans le développement de $(a - b + 2c)^9$?

Exercice 6.

Soient $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Soit $B \subset F$. Prouver que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. Prouver que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F , $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 7.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Prouver que f est injective si et seulement si il existe $g : F \rightarrow E$ tel que $g \circ f = id_E$.
2. Prouver que f est surjective si et seulement si il existe $g : F \rightarrow E$ tel que $f \circ g = id_F$.
3. Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite *inversible* s'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que

$$g \circ f = id_E \text{ et } f \circ g = id_F.$$

Prouver qu'une fonction f est inversible si et seulement si elle est bijective.

Exercice 8.

Soient $f : E \rightarrow F$ une application, A et B deux parties de E .

1. Prouver que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Montrer que

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Y-a-t-il égalité en général ? Illustrer votre réponse par des exemples.

3. Prouver que

$$\forall A, B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

si et seulement si f est injective.

Exercice 9.

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) = |x - 2|$;
2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_2(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$;
3. $f_3 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_3(x) = \frac{3x+1}{4x+1}$;
4. $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$;
5. $f_5 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^3$.

Exercice 10.

Soit $f : E \rightarrow F, A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

1. Solutions

Solution 1.

► *Version avec congruences* : soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $HR(n)$ la proposition

$$2^{4^n} + 5 \equiv 0[7].$$

• $HR(0)$ est vraie puisque $2^{4^0} + 5 = 7$.

• Prouvons que pour tout $n \geq 0$, $HR(n)$ implique $HR(n + 1)$: soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $HR(n)$ vraie, c'est-à-dire $2^{4^n} \equiv 2[7]$. Puisque $2^{4^{n+1}} = (2^{4^n})^4$, on a

$$2^{4^{n+1}} \equiv 2^4[7] \equiv 2[7].$$

D'où $2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0[7]$ et $HR(n + 1)$ est vraie.

• D'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{4^n} + 5 \equiv 0[7]$.

► *Version sans congruence* : posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^{4^n} + 5,$$

et soit $HR(n)$ la proposition « 7 divise u_n ».

• $HR(0)$ est vraie puisque $u_0 = 7$.

• Prouvons que pour tout $n \geq 0$, $HR(n)$ implique $HR(n + 1)$: soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $HR(n)$ vraie. Puisque $2^{4^{n+1}} = (2^{4^n})^4$, on a $u_{n+1} = (u_n - 5)^4 + 5$. En utilisant la formule du binôme et le triangle de Pascal,

$$u_{n+1} = u_n^4 - 20u_n^3 + 150u_n^2 - 500u_n + 5^4 + 5.$$

Or u_n est divisible par 7, ainsi que

$$5^4 + 5 = 5 \times 7 \times 18,$$

donc u_{n+1} est divisible par 7.

• D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $2^{4^n} + 5$ est divisible par 7.

Solution 2.

► $HR(0)$ est banalement vraie.

► Prouvons que pour tout $n \geq 0$, $HR(n)$ implique $HR(n + 1)$: soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $HR(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$n^5/5 + n^4/2 + n^3/3 - n/30 \in \mathbb{N}.$$

En utilisant la formule du binôme aux rangs 1, 2, 3, 4 et 5, et après regroupement des termes, on obtient l'égalité,

$$(n + 1)^5/5 + (n + 1)^4/2 + (n + 1)^3/3 - (n + 1)/30 = n^5/5 + n^4/2 + n^3/3 - n/30 + n^4 + 2n^3 + 9n^2 + 4n + 1.$$

$HR(n + 1)$ est donc vraie.

► D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^5/5 + n^4/2 + n^3/3 - n/30$$

est un entier naturel.

Solution 3.

La propriété n'est héréditaire que pour $n \geq 3$. Comme la propriété est fausse au rang 3, la démonstration est caduque.

Solution 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (1 + 2)^n = 3^n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} ((-2 + 1)^{2n} - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Solution 5.

La formule du binôme de NEWTON fournit

$$\begin{aligned} (a - b + 2c)^9 &= \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (a - b)^k (2c)^{9-k} \\ &= (a - b)^9 + \dots + \binom{9}{6} (a - b)^6 (2c)^3 \\ &\quad + \dots + (2c)^9 \end{aligned}$$

Ensuite,

Solution 6.

1. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe un élément x de $f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$ et ainsi $y \in B$.
2. *Raisonnons en deux temps.*
 ► Supposons f surjective. Soit $y \in B$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $x \in f^{-1}(B)$

Solution 7.

1. *Raisonnons en deux temps.*
 ► Supposons que f soit injective. Tout $y \in f(E)$ admet donc un unique antécédent x , on pose alors $g(y) = x$, ce qui définit g sur $f(E)$; on définit alors g sur $f(E)^c$ de n'importe quelle manière. L'application g vérifie bien $g \circ f = id_E$.
 ► Réciproquement, supposons l'existence d'une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = id_E$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ et donc $x = y$: l'application f est injective.
2. *Raisonnons en deux temps.*

Solution 8.

1. Raisonnons par double inclusion.
 ► Puisque $A \subset A \cup B$, on a $f(A) \subset f(A \cup B)$. De même $f(B) \subset f(A \cup B)$ et donc

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$
 ► Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe alors $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, $y = f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$. De même dans le cas où $x \in B$.
2. Raisonnons en deux temps.
 ► On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc

$$f(A \cap B) \subset f(A)$$
 et

$$f(A \cap B) \subset f(B)$$
 ainsi

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

$$\begin{aligned} (a - b)^6 &= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} a^k (-b)^{6-k} \\ &= a^6 - \dots + \binom{6}{4} a^4 b^2 - \dots + b^6 \end{aligned}$$

Le coefficient cherché est donc

$$\binom{9}{6} \binom{6}{4} 2^3 = \frac{9.8.7}{3.2} \frac{6.5}{2} .2^3 = 3.4.7.3.5.8 = 10080.$$

et $y \in f(f^{-1}(B))$.

► Supposons que $\forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$. En appliquant ce résultat à $B = F$, on obtient que $F = f(E)$ et f est donc surjective.

► Supposons que f soit surjective. Tout $y \in F$ admet donc au moins un antécédent x . Posons $g(y) = x$. L'application g ainsi définie vérifie bien $f \circ g = id_F$.

► Réciproquement, supposons l'existence d'une application $g : F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = id_F$. Soit $y \in F$. Puisque $f(g(y)) = y$, $g(y)$ est un antécédent de y par f : l'application f est donc surjective.

3. Si f est inversible, d'après ce qui précède, f est injective et surjective donc bijective. Réciproquement, si f est bijective, elle est inversible puisque $g = f^{-1}$ convient.

REMARQUE – En cas d'inversibilité, la fonction g est unique et vaut f^{-1} .

► On n'a pas nécessairement égalité comme en témoigne l'exemple suivant :

$$E = \{0, 1\}, A = \{0\}, B = \{1\}$$

et $f : E \rightarrow E$ définie par

$$f(0) = f(1) = 0,$$

où $f(A \cap B) = \emptyset$ et $f(A) \cup f(B) = \{0\}$.

Il s'agit de prouver que

$$\forall A, B \subset E, f(A) \cup f(B) \subset f(A \cap B)$$

si et seulement si f est injective.

3. ► Supposons f injective. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Par injectivité de f , on a alors $x_1 = x_2$, donc $x_1 \in A \cap B$ puis $y \in f(A \cap B)$.

► Supposons que

$$\forall A, B \subset E, f(A) \cup f(B) \subset f(A \cap B).$$

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Posons $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. On a alors

$$f(A) = f(B) = \{f(x)\} \subset f(A \cap B)$$

donc $f(A \cap B) \neq \emptyset$ et donc $x = y$.

Solution 9.

① Puisque $f_1(1) = f_1(3)$, f_1 n'est pas injective. On a clairement $-1 \notin f_1(\mathbb{R})$ donc f_1 n'est pas surjective.

② Puisque $f_2(4 \pm 2\sqrt{3}) = 1/4$, f_2 n'est pas injective. On a $1 \notin f_2(\mathbb{R})$ donc f_2 n'est pas surjective.

③ Puisque $\forall x \geq 0$,

$$f_3(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{16x + 4},$$

Solution 10.

Raisonnons par double inclusion.

► Comme $A \cap f^{-1}(B) \subset A$, on a

$$f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A).$$

Comme $A \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B)$, on a

$$f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

Ainsi Comme $A \cap f^{-1}(B) \subset A$, on a

la fonction f_3 est injective. Puisque $3/4 \notin f_3(\mathbb{R})$, la fonction f_3 n'est pas surjective.

④ La fonction f_4 est une bijection d'après le cours sur les fonctions usuelles.

⑤ Puisque tout nombre complexe admet au moins une racine cubique, f_5 est surjective. Puisque $f_5(1) = f_5(j)$ et $j \neq 1$, f_5 n'est pas injective.

$$f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B.$$

► Réciproquement, si $y \in f(A) \cap B$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x) \in B$ ainsi

$$x \in A \cap f^{-1}(B)$$

et donc

$$y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(B)).$$