TP Maple 4 | Algèbre linéaire

Les listes et les tableaux de chiffres sont des formats courants en science et en ingénieurie ; citons l'exemple des données statistiques : sondages, résultats d'expériences en physique ou en médecine, mesures diverses en chimie, etc. Dans ce chapitre, nous exposerons également comment faire du calcul matriciel avec Maple.

Maple propose le package **LinearAlgebra**. Le calcul se fait uniquement en coordonnées. Autrement dit, Maple ne connaît que les espaces vectoriels $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$.

1. Vecteurs et matrices

Il y a plusieurs manières de créer un vecteur en ligne ou en colonne. Le produit scalaire est représenté par un point.

```
> with(LinearAlgebra):
u:=Vector([1,4,a]) ;   v:=<1,2,0> ;   w:=<3|4|5> ;   u-v ;   u.v ;   Transpose(u) ;
```

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ a \end{bmatrix} \qquad u := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [3 \;\; 4 \;\; 5] \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ a \end{bmatrix} \qquad 9 \qquad [1 \;\; 4 \;\; a]$$

On peut aussi créer des vecteurs à coordonnées formelles.

```
> v:=Vector(3,symbol=a)  ;   v[2]:=0 :   v ;
```

$$v := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Les matrices aussi peuvent être créées de plusieurs manières.

```
> Matrix(2,3,[1,2,3,4,5,6]) ,   Matrix([[1,2,3],[4,5,6]]) ,   <<1,4>|<2,5>|<3,6>> ;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Bien entendu, il existe aussi des matrices formelles.

```
> A:=Matrix(2,2) ; A[1,2]:=a: A; B:=Matrix(2,2,symbol=a); B[2,1]:=2: B;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ 2 & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

Manipulation des matrices

- **A.B** : produit des matrices A et B.
- **IdentityMatrix(n)** : Matrice identité d'ordre n.
- **Transpose, Trace, MatrixInverse, Determinant, Rank, ColumnSpace, RowSpace** : évidents.
- **NullSpace(A)** : Donne le noyau de la matrice A.

Voyons sous quelle forme cette dernière commande donne le noyeau.

```
> A:=Matrix([[1,2,0],[0,1,1],[1,3,1]]); Noyau:=NullSpace(A); Image:=ColumnSpace(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad Noyau := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad Image := \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

Maple donne donc le résultat sous forme d'une base du sous-espace vectoriel en question. Réciproquement on définit un sous-espace vectoriel par une famille génératrice. Essayez l'exemple suivant.

```
> E:=[<1,2,3>,<4,5,6>,<5,7,9>];    Basis(E);
```

2. Exercices

Exercice 1.

Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que pour toute matrice carrée A on a $P_A(A) = 0$ où P_A est le polynôme caractéristique de A. Démontrer avec Maple le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices carrées d'ordre 3.

Exercice 2.

Démontrer avec Maple que pour toutes matrices A, B carrées d'ordre 4 on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Exercice 3.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants,

$$F = \left\{(\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

et

$$G = \left\{(x, y, z) \in E \mid x + 2y = 0\right\}.$$

A l'aide de Maple déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 4.

Trouver l'ensemble des matrices qui commutent avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Résoudre le système linéaire suivant,

$$\mathscr{S} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -2x & + & 4y & + & z & = & 2 \\ x & + & 18y & + & 17z & = & 9 \end{array} \right.$$

Exercice 6.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(A)$.

2. Déterminer le noyau de A. En déduire des relations de liaisons entre les colonnes de A.

Exercice 7.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et T_n l'endomorphisme de E_n défini par

$$T_n(P) = (nX + 1)P + (1 - X^2)P'.$$

1. Ecrire une procédure **MatriceT(n)** d'argument n calculant la matrice $M_n = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_n}(T_n)$ de T_n dans la base canonique $\mathscr{B}_n$ de E_n.

2. Ecrire deux procédures **BaseNoyau(n)** et **BaseImage(n)** renvoyant des bases de $\mathrm{Ker}(T_n)$ et de $\mathrm{Im}(T_n)$ pour un entier n quelconque.

3. Que trouve-t-on dans les cas $n = 3$ et $n = 4$?

Exercice 8.

Soient A et B les matrices suivantes de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il une matrice C telle que $A = CB$? Déterminer toutes les matrices C solutions.