TP Maple 2 | Fonctions et simplifications

1. Les fonctions mathématiques

Maple permet à l'utilisateur de créer ses propres fonctions au moyen d'une syntaxe inspirée de celle des mathématiques.

Définition d'une fonction f

f := x -> *expression dépendant de* x

L'utilisateur accédera aux valeurs de la fonction f en utilisant la syntaxe usuelle des mathématiciens.

```
> f:=x->x+sin(x); f(Pi); evalf(f(Pi),3);
```

$$f := x \to x + \sin(x)$$

$$\pi$$

$$3.14$$

Remarquons que la variable x est *muette*, on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre.

```
> f:=x->sin(x)^2; g:=y->cos(y)^2; h:=f+g; h(t); simplify(h(t));
```

$$f := x \to \sin^2(x)$$
$$g := y \to \cos^2(y)$$
$$h := f + g$$
$$\sin^2(t) + \cos^2(t)$$
$$1$$

```
> f:=u->u+sin(u): evalf(f(Pi));
```

$$3.141592654$$

Si f est une fonction, « $f(x)$ » sera considéré comme une expression par **Maple**. Cette expression peur très bien dépendre d'autres paramètres que x.

```
> f:=u->sin(t*u): t:=1: evalf(f(Pi));
```

$$0$$

```
> t:=0.5: f(Pi); t:=1.5: f(Pi);
```

$$1, -1$$

1.1. Fonctions usuelles

Maple dispose d'une librairie de fonctions usuelles prédéfinies. En voici un aperçu non exhaustif ...

Fonctions usuelles sous Maple

- L'exponentielle : **exp** ;
- La racine carrée : **sqrt** ;
- Le logarithme népérien : **ln** *ou* **log** ;
- $\sqrt[n]{x}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et n impair : **surd(x,n)** ;
- Cosinus, sinus, tangente, cotangente : **cos, sin, tan, cot**.
- Cosinus, sinus, tangente hyperboliques : **cosh, sinh, tanh** ;
- Arcosinus, arcsinus, arctangente : **arccos, arcsin, arctan** ;
- Argument cosinus, argument sinus, argument tangente hyperbolique : **arccosh, arcsinh, arctanh**.

On se souviendra que les nombres réels e et π sont respectivement codés **exp(1)** et **Pi** sous Maple.

1.2. Opérations sur les fonctions

Maple est capable d'effectuer les opérations algébriques élémentaires sur les fonctions telles que la somme, le produit, etc.

```
> restart: f:=x->x: g:=x->sin(x): h:=f+g, h(Pi), i:=f*g, i(Pi);
```

$$h := f + g, \pi, i := fg, 0$$

Opérations sur les fonctions

- **f + g** : somme de f et g ;
- **f * g** : produit de f et g ;
- **f / g** : quotient de f par g ;
- **f @ g** : composée $f \circ g$;
- **f @@ n** : composée $f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

```
> restart: f:=x->cos(x): h:=f@@3; h(x);
```

$$h := f^{(3)}$$

$$\cos(\cos(\cos(x)))$$

On voit que, pour noter une composée n-fois, Maple utilise des parenthèses – malheureusement cela peut porter confusion avec la dérivée n-ième.

Evidemment Maple trace aussi des courbes des fonctions (voir commande **plot** dans l'aide).

1.3. Exercices

Exercice 1.

A l'aide de Maple tracer les courbes des trois fonctions définies par $g(x) = x$, $h(x) = -x$ et $f(x) = x\sin(1/x)$ dans un même dessin.

Exercice 2.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1.5$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \sin(u_n)$. Calculer u_{2010}.

2. Manipulation des expressions usuelles

Voici en vrac quelques commandes permettant le calcul des expressions sous Maple.

```
> cos(2*x):expand(%);
```

$$2\cos(x)^2 - 1$$

```
> (a+b)^4:expand(%);
```

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

```
> expand(exp(a+ln(b)));
```

$$e^a b$$

```
> (X+3)/(X^2+4*X+3):normal(%);
```

$$\frac{1}{X+1}$$

```
> cos(x)^3:combine(%);
```

$$\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

```
> simplify(exp(a+ln(b*exp(c))));
```

$$be^{a+c}$$

```
> f := x*(x+1)+y*(x+1);
```

$$f := x(x+1) + y(x+1)$$

```
> collect(f,x);
```

$$x^2 + (1+y) * x + y$$

```
> P:=1+X^8+X^9+X+6*X^2+6*X^3+2*X^9+5*X^2-6*X-2;
```

$$P := 1 + X^8 + X^9 + X + 6X^2 + 6X^3 + 2X^9 + 5X^2 - 6X - 2$$

```
> sort(%);
```

$$3X^9 + X^8 + 6X^3 + 11X^2 - 5X - 1$$

Manipulation des expressions usuelles

- ▷ **expand** : développe par distributivité des expressions polynomiales, calcule les fonctions circulaires en nx en fonction de leur valeur en x, applique les règles de calcul sur les logarithmes et les exponentielles ;
- ▷ **normal** : simplifie les fractions rationnelles ;
- ▷ **combine** : linéarise s'utilise avec différentes options (cf. l'aide de **Maple**). Permet par exemple d'exprimer le sinus et le cosinus à l'aide de l'exponentielle complexe (ie applique les formules d'Euler !) ;
- ▷ **convert** : pour faire passer une expression d'une forme à une autre (par exemple de l'écriture décimale à l'écriture binaire pour les entiers). Voir l'aide en ligne pour les autres fonctionnalités ;
- ▷ **simplify** : permet de simplifier des expressions algébriques. Cf. l'aide en ligne ;
- ▷ **collect** : effectue des regroupements ;
- ▷ **sort** : écrit un polynôme selon les puissances décroissantes.

La commande **convert** permet de convertir une expression en une autre. Elle permet par exemple de *transformer* un développement de Taylor en une expression du type *polynom* en extrayant sa partie principale. Elle permet également la conversion des entiers d'une base de numération à une autre, la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles : on l'aura compris, la commande **convert** offre de très nombreuses fonctionnalités, on consultera l'aide en ligne afin d'explorer l'étendue de ses possibilités.

```
> convert(9, binary);
```

$$1001$$

```
> convert(1.892,fraction);
```

$$\frac{473}{250}$$

```
> f := sinh(x)+sin(x): convert(f, exp);
```

$$\frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2I}(e^{Ix} - e^{-Ix})$$

2.1. Exercices

Exercice 3.

Effectuer, afficher et commenter la séquence suivante :

```
> b:=cos(a): a:=Pi/2: b;
```

$$0$$

```
> a:=2*Pi/3: b;
```

$$-\frac{1}{2}$$

```
> c:=cos(a): a:=3*Pi/4: b, c;
```

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}$$

Exercice 4.

Vérifier avec Maple que le produit de 4 nombres entiers en progression arithmétique auquel on ajoute la puissance quatrième de la raison est toujours un carré.

Exercice 5.

Déterminer une équation à coefficients entiers du septième degré dont $2\cos(\pi/7)$ est solution. On pourra partir de **expand(cos(7*t))**.

Exercice 6.

Simplifier

$$\frac{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}+\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}.$$

Exercice 7.

En explorant la rubrique consacrée à la commande **convert** de l'aide en ligne, trouver l'expression de

$$\cos^3(2x)\sin^2(x)$$

en fonction de $t = \tan(x/2)$. On obtiendra une fraction rationnelle en la variable t que l'on factorisera au maximum.