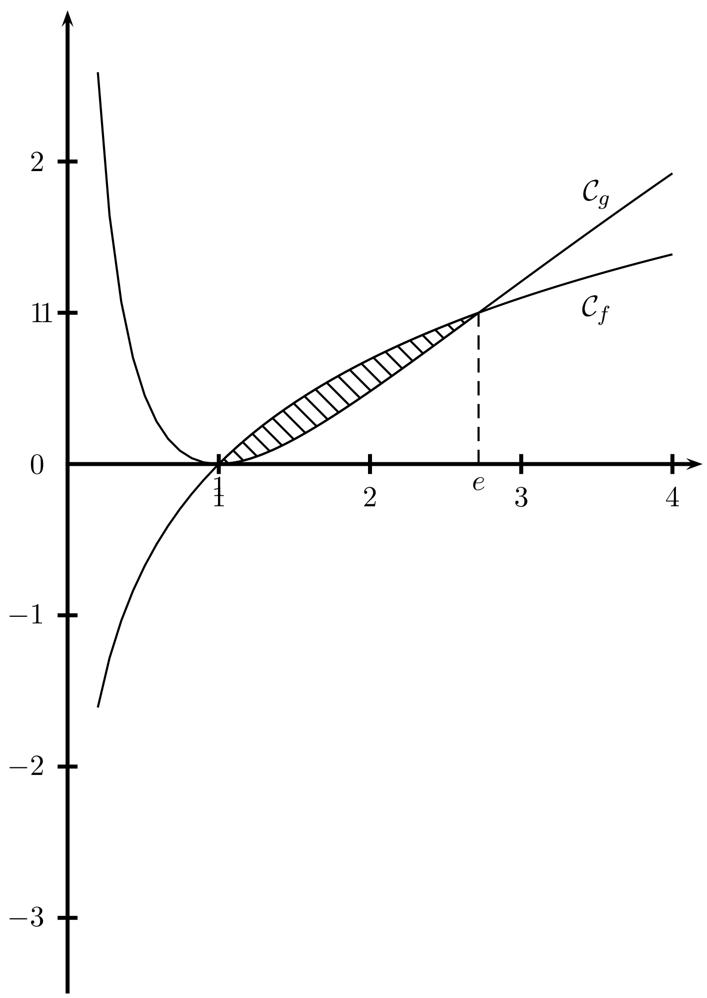
Sujet du baccalauréat S France 19 juin 2008

www.MathOMan.com

Exercice 1 — Commun à tous les candidats **5 points**

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ,\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ell\mathrm{n}\, x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ell\mathrm{n}\, x)^2.$$



1) On cherche à déterminer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.
On note $I = \displaystyle\int_1^e \ell\mathrm{n}\, x \,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^e (\ell\mathrm{n}\, x)^2 \,\mathrm{d}x$.

a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ,\ +\infty[$ par $F(x) = x\,\ell\mathrm{n}\, x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = e - 2I$.

c) En déduire J.

d) Donner la valeur de $\mathcal{A}$.

2) *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
Pour x appartenant à l'intervalle $[1,e]$, on note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Exercice 2 — Commun à tous les candidats **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points $A(1,1,0)$, $B(1,2,1)$ et $C(3,-1,2)$.

1) **a)** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne
$2x + y - z - 3 = 0$.

2) On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.
Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est une droite $\mathcal{D}$, dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

3) Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$?

4) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 3 — Commun à tous les candidats **5 points**

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
La fonction R définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1) Restitution organisée de connaissances

a) Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.

b) Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

2) Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}00026$.

a) Calculer $P(X \leqslant 1000)$ et $P(X > 1000)$.

b) Sachant que l'évènement $(X > 1000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement $(X > 2000)$.

c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$(unité graphique : 1 cm).
Soient A,B et I les points d'affixes respectives $1+i$, $3-i$ et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M' est appelé l'image de M.

1) Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.

2) Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?

3) Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.

4) **a)** Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z-2)^2$.

b) En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg(z'+4)$ et $\arg\,(z-2)$,

c) Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 ?

5) Soient E le point d'affixe $2 + 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E.

a) Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $(\mathsf{vect}\,u, \mathsf{vect}\,IE)$.

b) Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $(\mathsf{vect}\,u, \mathsf{vect}\,JE')$.

c) Construire à la règle et au compas le point E' ; on laissera apparents les traits de construction.

Exercice 4 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 7 + \dfrac{7}{2}i$.

1) On considère la droite d d'équation $4x + 3y = 1$.
Démontrer que l'ensemble des points de d dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k+1,\, -4k-1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2,\, 3)$.

3) Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2}{3}iz + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i.$$

Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.

4) On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

a) Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.

b) À partir de quel entier n le point B_n, appartient-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

c) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.