Corrigé du baccalauréat S France 19 juin 2008

www.MathOMan.com

Exercice 1 — Commun à tous les candidats **5 points (0,75+1,5+0,25+0,75+1,5)**

1) **a)** La fonction F est dérivable et avec les règles habituels de dérivation on trouve $F' = \ell\mathsf{n}$, c'est-à-dire F est un primitive de la fonction $\ell\mathsf{n}$. Ainsi

$$I = \int_1^e \ell\mathsf{n}\, x \,\mathrm{d}x = F(e) - F(1) = 0 - (-1) = 1\,.$$

b) Deux méthodes d'intégrations par parties sont possibles :

- On a $g = u'g$ où $u(x) = x$ et g sont des fonctions continûment dérivables. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_1^e g(x)\,\mathrm{d}x &= \big[u(x)g(x)\big]_1^e - \int_1^e u(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \big[x(\ell\mathsf{n}\,x)^2\big]_1^e - \int_1^e x\,\frac{2\,\ell\mathsf{n}\,x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= e - 0 - 2\int_1^e \ell\mathsf{n}\,x\,\mathrm{d}x = e - 2I\,.\end{aligned}$$

- On a $g = F'f$ où f et F sont continûment dérivables. On peut donc appliquer une intégration par parties pour déterminer une primitive de g :

$$\begin{aligned}\int g(x)\,\mathrm{d}x &= \int F'(x)f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)f(x) - \int F(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)f(x) - \int (\ell\mathsf{n}\,x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= F(x)f(x) - F(x) + x\,,\end{aligned}$$

d'où

$$J = \big[F(x)(f(x) - 1) + x\big]_1^e = \ldots = e - 2 = e - 2I\,.$$

c) Nous savons déjà que $J = e - 2$.

d) Si $1 \leqslant x \leqslant e$ on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ et donc $f(x) \geqslant f(x)^2 = g(x)$. Donc la courbe de g se trouve en-dessous de la courbe de f – on le voit aussi sur le graphique. Ainsi l'aire $\mathcal{A}$ incluse entre ces deux courbes est la différence

$$\mathcal{A} = I - J = 1 - (e - 2) = 3 - e\,.$$

2) A cause de la position relative des deux courbes, la distance MN est la différence,

$$h(x) = f(x) - g(x) = \ell\mathsf{n}\,x(1 - \ell\mathsf{n}\,x)\,, \qquad 1 \leqslant x \leqslant e\,.$$

Posons $t = \ell\mathsf{n}\,x$. Alors la fonction de second degré $t \mapsto t(1-t)$ possède son unique maximum en $t = \frac{1}{2}$ (milieu entre les racines 0 et 1) et cette valeur maximale est $\frac{1}{4}$. Donc h est maximale si $\ell\mathsf{n}\,x = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire en $x = \sqrt{e}$, et la valeur maximale de MN est $\frac{1}{4}$.

Exercice 2 — Commun à tous les candidats **5 points (0,5+0,75+1,25+1+1,5)**

1) **a)** Il suffit de voir que les vecteurs $\overrightarrow{AB}(0,1,1)$ et $\overrightarrow{AC}(2,-2,2)$ sont non-colinéaires. En effet, on voit à l'œil nu que les triplets de coordonnées ne sont pas proportionnels.
(On peut aussi constater que, dans ce cas particulier, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, donc les trois points distincts A,B,C forment un triangle rectangle et ne sont pas alignés.)

b) Par conséquence les points A,B,C définissent un plan. On vérifie que les coordonnées de A vérifient l'équation proposée dans l'énoncé :

$$2\times 1+1-0-3=0,$$

et de même pour les deux autres points. Il s'agit donc d'une équation du plan (ABC).

2) Les vecteurs de coordonnées $(1,2,-1)$ et $(2,3,2)$ sont des vecteurs normaux respectives des plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Leurs triplets de coordonnées ne sont pas proportionnels (regarder par exemple les signes), et donc il s'agit de vecteurs non-colinéaires. Cela signifie que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des plans non-parallèles, et donc leur intersection est une droite. Pour montrer qu'il s'agit de la droite $\mathcal{D}$ de l'énoncé il suffit alors de vérifier que $\mathcal{D}$ est contenue dans chacun des deux plans. On a pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$(-2+t)+2\times 3-t-4=0\,,$$

ce qui montre $\mathcal{D}\subset\mathcal{P}$. De même on montre $\mathcal{D}\subset\mathcal{Q}$.
Une autre méthode, moins élégante, consiste à résoudre le système linéaire constitué des equations des deux plans...

3) D'après ce qui précède $(ABC)\cap\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}=(ABC)\cap\mathcal{D}$. Un point de la droite $\mathcal{D}$ a comme coordonnées $(t-2,3,t)$, avec un certain réel t. Ce point est donc dans l'intersection cherchée si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan (ABC), c'est-à-dire si et seulement si

$$2(t-2)+3-t-3=0\,.$$

On obtient $t=4$, et donc l'intersection des trois plans (ABC), $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est le point de coordonnées $(2,3,4)$.
Une autre méthode, moins élégante, consiste à résoudre le système linéaire constitué des equations des trois plans...

4) Voici deux méthodes possibles :

- Notons d la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ et A' le projété orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. Alors $d=AA'$, et il ne reste qu'à trouver les coordonnées de A'. On sait deux choses sur A' : d'une part $A'\in\mathcal{D}$, donc les coordonnées de A' s'écrivent $(t-2,3,t)$ avec un certain réel t. D'autre part $\overrightarrow{AA'}(t-3,2,t)$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}(1,0,1)$, vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$. Traduit en produit scalaire cela donne l'équation

$$(t-3)\times 1+2\times 0+t\times 1=0\,.$$

On trouve $t=\frac{3}{2}$ donc $\overrightarrow{AA'}(-\frac{3}{2},2,\frac{3}{2})$, et finalement $d=\sqrt{\frac{17}{2}}$.

- La distance entre A et la droite $\mathcal{D}$ est le minimum de AM_t où le point $M_t(t-2,3,t), t\in\mathbb{R}$, parcourt la droite $\mathcal{D}$. On pose donc

$$f(t)=\left\|\overrightarrow{AM_t}\right\|^2=(t-2-1)^2+(3-1)^2+(t-0)^2=2t^2-6t+13\,.$$

(En fait, le carré de la distance est plus facile à manipuler car une expression sans racine carrée.) La fonction de second degré f possède son minimum en $t=\frac{3}{2}$. La distance entre A et $\mathcal{D}$ est alors $\sqrt{f\left(\frac{3}{2}\right)}=\sqrt{\frac{17}{2}}$.

Exercice 3 — Commun à tous les candidats **5 points (1+1+1+1+1)**

On rappelle qu'une loi de probabilité doit vérifier $\lim\limits_{t\to+\infty} P(X \leqslant t) = 1$. Nous avons bien

$$\lim_{t\to+\infty} P(X \leqslant t) = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \big[-e^{-\lambda x}\big]_0^t = 1 - \lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} = 1 \qquad (\lambda > 0)\,.$$

1) **a)** Pour tout $t \geqslant 0$ on a

$$R(t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 1 - \big[-e^{-\lambda x}\big]_0^t = e^{-\lambda t}$$

b) Soient $s, t \geqslant 0$. Evidemment l'intersection de l'événement $\{X > t+s\}$ et de l'événement $\{X > t\}$ est $\{X > t+s\}$. Donc

$$P_{X>t}(X > t+s) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}\,e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

ne dépend que de s.
Autrement dit, la probabilité qu'un appareil qui fonctionne à un moment initial t fonctionne encore s heures supplémentaires est la même pour tous les t. En particulier il coïncide avec $P_{X>0}(X > 0+s) = P(X > s)$.
C'est pourquoi on parle d'une durée de vie sans viellissement. C'est un privilège des appareils techniques, que la vie organique ne possède pas ; par exemple chez les êtres humains, la probabilité de vivre encore 10 ans est plus grande chez une personne agée de 5 ans que chez une personne agée de 90 ans.

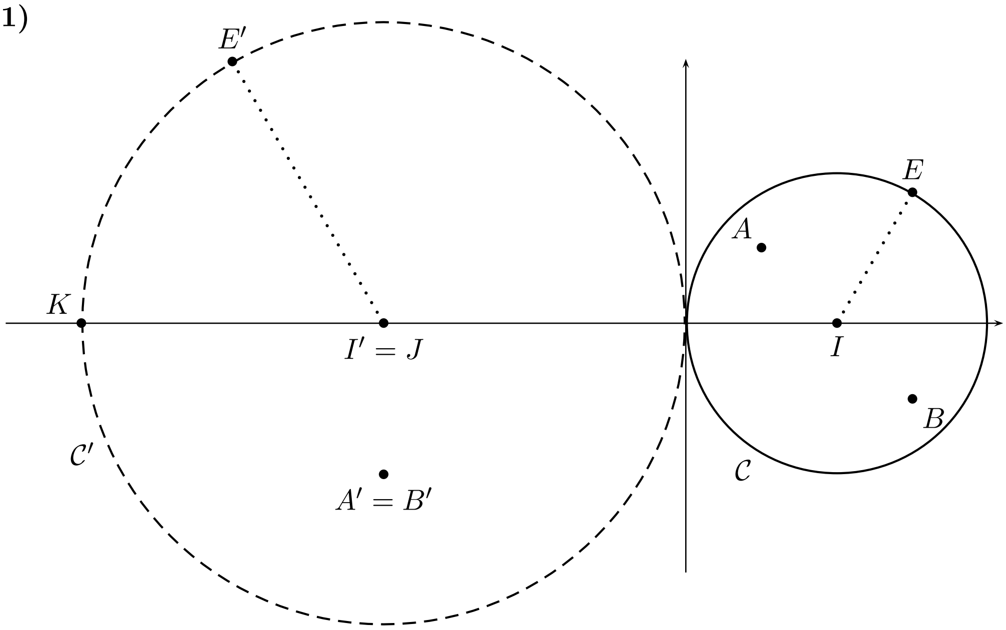
2) **a)** $P(X > 1000) = e^{-0{,}26} \approx 0{,}771$ et $P(X \leqslant 1000) = 1 - e^{-0{,}26} \approx 0{,}229$.

b) C'est la situation de la question 1.b), en prenant $s = t = 1000$. La probabilité qu'un appareil fonctionnel (au moment $t = 1000$ ou tout autre) fonctionne encore 1000 heures supplémentaires est $P(X > 1000) = e^{-0{,}26}$.

c) D'après ce qu'on vient de dire, la probabilité qu'un appareil fonctionnel tombe en panne dans les 1000 heures à venir est $1 - e^{-0{,}26}$. Donc, sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures est $1 - e^{-0{,}26}$.
Ce résultat était-il prévisible ? Je ne comprends pas cette question – en tout cas, j'ai dû refléchir pour avoir le résultat, il n'est pas tombé du ciel !

Exercice 4 — Candidats sans la spécialité **5 points**
(0,5+0,5+0,75+0,25+0,75+0,5+0,5+0,75+0,5)

1)



2) On trouve le même affixe $-4-2i$ pour A' et B'.

3) Ce sont tous les points dont l'affixe z vérifie l'équation de second degré $z^2 - 4z = -5$ qu'on résoud facilement pour trouver les points d'affixes $2 \pm i$.

4) **a)** Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z-2)^2 = z^2 - 4z + 4 = z' + 4$.

b) On déduit $|z'+4| = |z-2|^2$ et, pour $z \neq 2$, $\mathsf{Arg}\,(z'+4) \equiv 2\,\mathsf{Arg}(z-2) \mod 2\pi$.

c) Lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 alors le point M' décrit le cercle $\mathcal{C}'$ de centre I' et de rayon 4.
(Plus généralement, si un point parcourt une fois le cercle de centre I et de rayon $r > 0$, alors son image parcourt deux fois le cercle de centre $I' = J$ et de rayon r^2. On le voit bien avec les points A et B ; ils se trouvent sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$ et sont opposés, leurs images se trouvent sur le cercle de centre I' et de rayon 2 et se confondent.)

5) **a)** $z_E - z_I = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $IE = 2$ et $(\mathsf{vect}\,u,\ \mathsf{vect}\,IE) = \pi/3$.

b) Deux méthodes :

- Un observateur placé en I voit le point E à distance 2 et sous un angle de $\pi/3$. D'après **4.b)** un observateur placé en $I' = J$ voit le point E' à distance 4 et sous un angle de $2\pi/3$. Ainsi $JE' = 4$ et $(\mathsf{vect}\,u,\ \mathsf{vect}\,JE') = 2\pi/3$.
- On calcule l'affixe de E' :

$$z_{E'} = z_E(z_E - 4) = \big(2 + 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\big)\big(-2 + 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\big) = -4 + 4\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\,.$$

On trouve donc $JE' = 4$ et $(\mathsf{vect}\,u,\ \mathsf{vect}\,JE') = 2\pi/3$.

c) Pour construire le point E' beaucoup de méthodes sont possibles dont les suivantes :

- Tracer le cercle de centre J et de rayon 4, puis la droite verticale d'équation $x = -6$.
- Tracer le cercle de centre J et de rayon 4, puis “copier” l'angle $\measuredangle EIO$.
- Tracer le cercle $\mathcal{C}'$ de centre J et de rayon 4 ; il y a deux intersections avec l'axe réelle, O et K. Tracer le cercle de centre K et de rayon 4, il y a deux intersections avec $\mathcal{C}'$ dont l'une est E'.

Exercice 4 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité **5 points**
(1,25+1+0,75+0,25+1+0,75)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 7 + \frac{7}{2}i$.

1) En ramplaçant les coordonnées de M_k dans l'équation de d on voit sans peine que $M_k \in d$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Pour montrer la réciproque soit $M \in d$ un point à coordonnées entières. On a $4x_M + 3y_M = 1$. Or le point $A(1, -1)$ est aussi dans d car $4 \times 1 + 3 \times (-1) = 1$. Par soustraction des deux équations on obtient $4(x_M - 1) + 3(y_M + 1) = 0$ ou encore $3(y_M + 1) = -4(x_M - 1)$. Donc le nombre premier 3 divise le produit $4(x_M - 1)$ et comme il ne divise pas 4 il divise $x_M - 1$, c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3k = x_M - 1$. Ainsi $x_M = 3k + 1$, et par conséquence $y_M = -4k - 1$. Cela prouve que M est bien de la forme M_k pour un certain entier k.

2) On calcule

$$\frac{z_{M_{-1}} - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2 + 3i - (1 - i)}{7 + \frac{7}{2}i - (1 - i)} = \ldots = \frac{2i}{3}\,.$$

Il s'agit donc de la similitude directe de centre A, d'angle $90°$ et de rapport $\frac{2}{3}$.

3) Notons $\tilde{s}$ la similitude directe de la question **2)**. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\tilde{s}(z) - z_A = \frac{2i}{3}(z - z_A)$, d'où

$$\tilde{s}(z) = \frac{2i}{3}z + \left(1 - \frac{2i}{3}\right) z_A = \ldots = \frac{2}{3}iz + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i\,.$$

Ainsi s n'est rien d'autre que la similitude $\tilde{s}$. En particulier A est point fixe de s.

4) On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

a) Posant $B_0 = B$ on a $AB_{n+1} = \frac{2}{3}AB_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Par récurrence on trouve $AB_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n AB$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sachant que

$$AB = |z_B - z_A| = \left|6 + \frac{9}{2}i\right| = \frac{15}{2}\,,$$

pour savoir quand le point B_n appartient disque de centre A et de rayon 10^{-2}, il faut résoudre

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{15}{2} \leqslant \frac{1}{100} \iff \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \frac{1}{750} \iff n\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant -\,\ell\mathrm{n}\,750 \iff n \geqslant \frac{\ell\mathrm{n}\,750}{\ell\mathrm{n}\,3 - \ell\mathrm{n}\,2} \approx 16{,}3$$

C'est pour $n \geqslant 17$ que le point B_n vérifie la condition en question.

c) Comme l'angle de rotation dans la similitude s est $90°$ le point B_n "retombe" sur la droite AB_1 un temps sur deux – plus précisément A, B_1 et B_n sont alignés si et seulement si n est impair.