Corrigé du bac ES Pondichéry 16 avril 2009

www.MathOMan.com

Exercice 1 — Commun à tous les candidats **5 points**

Partie A

1) $\dfrac{1}{3}$

2) $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}4$

3) $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$

Remarque : la condition dans l'énoncé $p(\mathrm{A}) \neq 0$ et $p(\mathrm{B}) \neq 0$ est superflue.

4) $a = -12$

Partie B

Dans cette partie toutes les réponses seront justifiées.

Dans un club de sport, Julien joue au basket. Il sait que lors d'un lancer sa probabilité de marquer un panier est égale à 0,6.

1) Julien lance le ballon quatre fois de suite. Les quatre lancers sont indépendants les uns des autres.

a) Lors d'un unique lancer la probabilité que Julien ne marque aucun panier est $1 - 0{,}6 = 0{,}4$. La probabilité qu'il ne marque aucun panier lors des quatre lancers est alors $0{,}4^4 = 0{,}0256$.

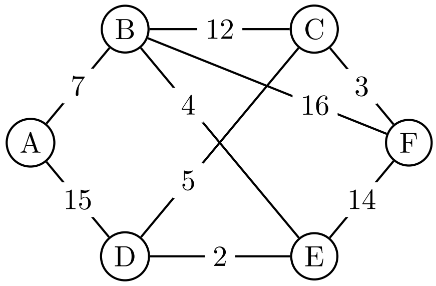
b) Marquer au moins un panier c'est le contraire de ne marquer aucun paenier. La probabilité est donc $1 - 0{,}0256 = 0{,}9744$.

2) D'après ce qu'on vient de voir la probabilité de marquer au moins un panier lors de n lancers est $1 - 0{,}4^n$. On cherche donc le plus petit nombre naturel n tel que $1 - 0{,}4^n \geqslant 0{,}999$.

$$0{,}999 \leqslant 1 - 0{,}4^n \quad \Longleftrightarrow \quad 0{,}4^n \leqslant 0{,}001 \quad \Longleftrightarrow \quad n \ln 0{,}4 \leqslant \ln 0{,}001 \quad \overset{\ln 0{,}4<0}{\Longleftrightarrow} \quad n \geqslant \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}4} \approx 7{,}53$$

Julien doit alors lancer le ballon au minimum huit fois.

Exercice 2 — Candidats avec spécialité maths **5 points**



1) Le graphe est connexe car il y existe un chemin reliant tous les sommets, par exemple A-B-C-D-E-F.

2) Nous allons utiliser l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	Sél.	Coéff.
0	∞	∞	∞	∞	∞	A	0
	B 7	∞	D 15	∞	∞	B	7
		B 19	D 15	B 11	B 23	E	11
		B 19	E 13		B 23	D	13
		D 18			B 23	C	18
					C 21	F	21

Le temps de transport minimal pour aller du site A au site F est donc 21 heures et se réalise par le parcours A-B-E-D-C-F.

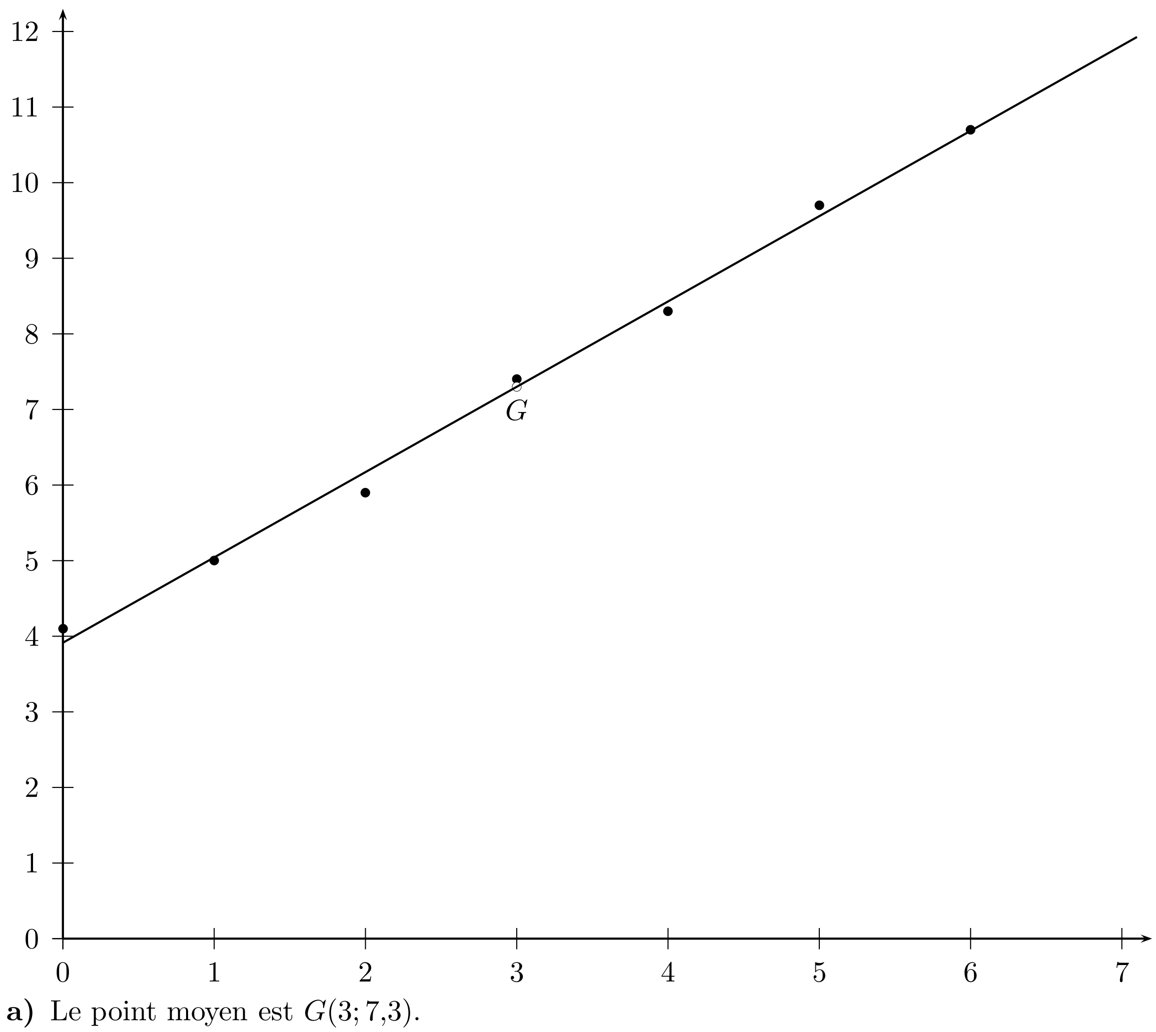
3) Ecrivons les degrés des sommets : A2, B4, C3, D3, E3, F3.
Comme il y a plus de trois sommets de degré impair il n'y a pas de chemin eulérien.

Exercice 2 — Candidats sans spécialité maths **5 points**

Partie 1 On a $\frac{16{,}6}{13} \approx 1{,}2769$. Le pourcentage d'augmentation est donc d'environ 27,7 %.

Partie 2

1)



2) **a)** Le point moyen est $G(3; 7{,}3)$.

b) L'équation réduite de la droite d d'ajustement de y en x est $y \approx 1{,}1x + 3{,}9$.

c) Voir dessin.

3) L'année 2010 correspond au rang 7, donc on prévoit $1{,}1 \times 7 + 3{,}9 = 11{,}6$ millions retraités.

Partie 3

1) On a

$$R_{1975} = \frac{13}{4{,}1} \quad \text{et} \quad R_{2005} = \frac{16{,}6}{10{,}7} \implies \frac{R_{2005}}{R_{1975}} = \frac{166 \times 41}{107 \times 130} \approx 0{,}489$$

C'est le coefficient multiplicateur d'une diminution de 51,1 %.

2) On trouve

$$R_{2010} = \frac{16{,}6 \times 1{,}064}{10{,}7 \times 1{,}121} = R_{2005} \times \frac{1{,}064}{1{,}121} \approx R_{2005} \times 0{,}949\,.$$

Ainsi on voit qu'entre 2005 et 2010 le rapport démographique diminue de 5,1 %.

Exercice 3 — Commun à tous les candidats **10 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

Partie A. Lectures graphiques

1) Comme la tangente passe par les points A(e ; 0) et D(0 ; $-$ e) on trouve sans problème son équation : $y = x - \mathrm{e}$.

2) **a)** $f(1) = -1$ et $f'(1) = 0$.

b)

x	0		e		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	

c)

x	0		1		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

d) La dérivée f de F est négative sur $]0\ ,\ \mathrm{e}]$ et donc F est décroissante sur cet intervalle. De même F est croissante sur $[\mathrm{e}\ ,\ 5]$.

e) L'aire est comprise entre 2 et 3.

Partie B. Étude de la fonction

La courbe $\mathcal{C}$ de la partie A est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x - 1).$$

1) **a)** Lorsque x tend vers $+\infty$ le logarithme de x tend également vers $+\infty$. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(\ln x - 1) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty.$$

b) On trouve

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x\ln x - x) = \lim_{x\to 0} x\ln x - \lim_{x\to 0} x = 0\,.$$

2) **a)** Avec la règle du produit on obtient

$$f'(x) = 1 \times (\ln x - 1) + x \times \frac{1}{x} = \ln x.$$

b) Le logarithme, c'est-à-dire la dérivée de f, est positif sur l'intervalle $[1\ ,\ +\infty[$ et négatif sur $]0\ ,\ 1]$. Alors

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3) **a)** Avec les règles de dérivation on obtient pour tout $x > 0$,

$$H'(x) = x\ln x + \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} - \frac{2}{4}x = x\ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x\ln x = h(x).$$

Cela prouve que H est une primitive de h.

b) Comme $f(x) = h(x) - x$ on peut prendre

$$F(x) = H(x) - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4}.$$

Donc

$$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\mathrm{e}) - F(1) = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3\mathrm{e}^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3 - \mathrm{e}^2}{4}\,.$$

c) La valeur de l'intégrale est négative, car entre $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ la courbe est située en-dessous de l'axe des abscisses. L'aire est donc l'opposée de la valeur de l'intégrale, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{e}^2 - 3}{4} \approx 1{,}1\,.$$

Vu le dessin ce résultat semble plausible.